

Apuntes de Física I

Dr. L. Conde

Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

16 de septiembre de 2013

Nota

Estos apuntes pueden obtenerse gratuitamente en formato pdf en la página web de la asignatura Física I:

**[http://www.aero.upm.es/es/departamentos/
/fisica/PagWeb/asignaturas/fisica1/Fisica1.html](http://www.aero.upm.es/es/departamentos/fisica/PagWeb/asignaturas/fisica1/Fisica1.html)**

donde también se encuentra toda la información relativa al presente curso.

Los apuntes no pretenden sustituir a ninguno de los excelentes textos que se citan en la bibliografía que se encuentran en la Biblioteca del Centro a disposición de los alumnos y cuyo empleo como libros de consulta se aconseja encarecidamente. Con este objetivo, se citan a lo largo del texto secciones específicas de dichos manuales.

La extensión de cada apartado no se corresponde exactamente con el contenido del curso; faltan ejemplos y algún tema adicional que se explicará durante las clases. También se han omitido algunas demostraciones que pueden encontrarse en los textos de la bibliografía.

Un curso de Física elemental necesita ineludiblemente de algunas herramientas matemáticas. Me ha parecido aconsejable incluir un capítulo especial denominado *Complementos* donde se introducen algunos de los conceptos necesarios de un modo informal. A medida que se hacen necesarios se hace referencia en el texto a dichos contenidos.

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1. | Vectores | 1 |
| 1.1. | Introducción | 1 |
| 1.2. | Magnitudes vectoriales y escalares | 1 |
| 1.3. | Componentes cartesianas de un vector | 3 |
| 1.4. | Operaciones con vectores | 4 |
| 1.4.1. | Producto por un escalar y vectores unitarios | 4 |
| 1.4.2. | Suma y resta de vectores | 4 |
| 1.4.3. | Producto escalar | 5 |
| 1.4.4. | Producto vectorial | 6 |
| 1.4.5. | Producto mixto | 8 |
| 1.4.6. | Momento de un vector respecto de un punto y respecto de un eje | 8 |
| 1.5. | Sistemas coordenados | 10 |
| 1.6. | Funciones vectoriales y escalares | 11 |
| 1.6.1. | Curvas y superficies: Convenio de signos | 12 |
| 1.6.2. | Derivada de una función vectorial respecto de un parámetro | 13 |
| 1.6.3. | Integración de una función vectorial respecto de un parámetro | 14 |
| 1.6.4. | Integral de línea | 14 |
| 2. | Cinemática de una partícula | 17 |
| 2.1. | Posiciones, velocidades y aceleraciones | 17 |
| 2.2. | Movimiento circular | 20 |
| 2.3. | Movimiento en un plano | 22 |

| | |
|--|-----------|
| 3. Movimiento relativo | 24 |
| 3.1. Derivada de un vector | 25 |
| 3.2. Transformación de velocidades y aceleraciones | 27 |
| 3.3. Movimiento circular | 28 |
| 4. Dinámica de una partícula | 30 |
| 4.1. Leyes de Newton | 30 |
| 4.2. Fuerzas | 31 |
| 4.2.1. Interacciones | 32 |
| 4.2.1.1. Campo gravitatorio | 32 |
| 4.2.1.2. Campo electromagnético | 33 |
| 4.2.2. Fuerzas macroscópicas | 34 |
| 4.2.2.1. Reacciones | 34 |
| 4.2.2.2. Fuerza de rozamiento | 35 |
| 4.2.3. Fuerzas en hilos y poleas | 35 |
| 4.2.3.1. Fuerza de un muelle | 36 |
| 4.2.4. Fuerzas de inercia | 36 |
| 4.3. Trabajo y energía | 39 |
| 4.4. Fuerzas conservativas | 41 |
| 4.4.1. Energía potencial elástica | 42 |
| 4.4.2. Energía potencial gravitatoria | 43 |
| 4.4.3. Potencial electrostático | 44 |
| 4.4.4. Energía potencial centrífuga | 45 |
| 4.5. Momento cinético | 46 |
| 4.6. Problema resuelto | 47 |
| 5. Sistemas de partículas | 51 |
| 5.1. Posición y velocidad del centro de masas | 52 |
| 5.2. Movimiento del centro de masas | 53 |
| 5.3. Energía de un sistema de partículas | 54 |
| 5.4. Momento cinético de un sistema de partículas | 56 |
| 5.5. Aplicaciones | 58 |
| 5.5.1. Sistema de dos partículas | 58 |
| 5.5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales | 60 |
| 5.5.3. Leyes de Kepler | 62 |
| 5.6. Leyes de conservación | 64 |
| 5.7. Problema resuelto | 65 |

| | |
|--|------------|
| 6. Sólido rígido: cinemática, centro de masas y momentos de inercia | 69 |
| 6.1. Cinemática del sólido rígido | 69 |
| 6.1.1. Grados de libertad de un sólido rígido | 69 |
| 6.1.2. Reducción de sistemas de vectores deslizantes | 70 |
| 6.1.3. Campos de velocidades y aceleración de un sólido rígido | 72 |
| 6.2. Centro de masas de un sólido rígido | 73 |
| 6.2.1. Cálculo de centros de masas | 75 |
| 6.3. Momentos de inercia | 78 |
| 6.3.1. Teorema de Steiner | 80 |
| 7. Dinámica del sólido rígido | 82 |
| 7.1. Ecuación de la cantidad de movimiento | 83 |
| 7.2. Ecuación del momento cinético | 83 |
| 7.3. Ecuación de la energía | 86 |
| 7.4. Movimiento plano | 88 |
| 7.5. Estática | 92 |
| 8. Movimiento oscilatorio | 93 |
| 8.1. El oscilador armónico simple | 93 |
| 8.2. El péndulo simple | 96 |
| 8.3. El péndulo físico | 98 |
| 8.4. El oscilador armónico amortiguado | 100 |
| 8.5. El oscilador armónico forzado | 101 |
| 9. Complementos | 103 |
| 9.1. Sistemas coordenados | 103 |
| 9.2. La resolución de las ecuaciones del movimiento | 104 |
| 9.3. Aproximaciones y series de potencias | 106 |
| 9.4. Propiedades de la elipse | 108 |
| 9.5. Campos escalares y vectoriales | 109 |
| 9.6. Derivadas parciales | 109 |
| 9.7. Curvas y superficies: Convenio de signos | 110 |
| 9.8. Integral de línea | 111 |
| 9.9. Flujo de un campo vectorial | 112 |
| 9.10. El operador nabla: Gradiente y divergencia | 113 |
| 9.11. El teorema de Gauss | 117 |
| 9.12. Ecuación de continuidad y vector flujo másico | 117 |
| 9.13. Los ejes principales de inercia | 119 |

10. Bibliografía

120

1.1. Introducción

Los cursos de Física General comienzan tradicionalmente con la Mecánica, que es la descripción del movimiento de los cuerpos. Este es el problema más antiguo de la Física desde el punto de vista histórico y resulta obvio que las trayectorias de los objetos que se mueven en el espacio son frecuentemente curvas muy complicadas. Su correcta descripción matemática necesita de unas herramientas adecuadas. Por ejemplo, la velocidad, la aceleración y las fuerzas que causan el movimiento de los cuerpos son vectores. Lo mismo sucede en todos los campos de la Física como el electromagnetismo, la propagación de ondas, etc.

Los vectores y las ecuaciones vectoriales nos permiten formular las leyes y principios de la Física de un modo preciso y sistemático. Como veremos seguidamente, en la Física existen multitud de magnitudes vectoriales, como el campo eléctrico, el campo magnético, etc.

En primer lugar vamos a introducir los vectores y sus operaciones básicas. El material del presente capítulo es importante puesto que aunque en su mayor parte es un repaso de bachillerato, a lo largo del curso haremos un uso intensivo del material que se desarrolla aquí.

1.2. Magnitudes vectoriales y escalares

En la Física entendemos por *magnitud* todo aquello susceptible de ser medido y por *medida* el resultado de la comparación con una cantidad arbitraria de la misma que denominamos *unidad* de dicha magnitud.

Las magnitudes físicas se dividen en *escalares* y *vectoriales*. Los *escalares* resultan completamente determinadas mediante un número real y la unidad en que se miden.

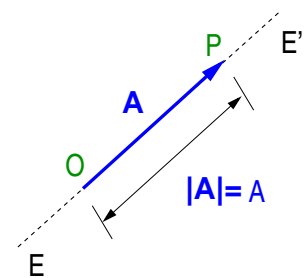


Figura 1.1: Representación geométrica de un vector.

Las magnitudes *vectoriales* requieren además especificar una dirección del espacio y uno de los dos sentidos posibles a lo largo de dicha recta. Geométricamente la representamos mediante un segmento orientado como el de la Fig. 1.1 que queda definido por las siguientes características:

- Su *dirección*; es la recta EE' que contiene el segmento OP . Llamada *recta soporte* o de *aplicación*.
- Su *sentido*; se indica mediante una punta de flecha.
- El *punto de aplicación* u *origen*; es el punto P .
- Su *módulo*; es la longitud del segmento $|\overrightarrow{OP}|$.

Es decir, las *magnitudes vectoriales* están ligadas a una dirección en el espacio y no pueden representarse matemáticamente por un único número como las magnitudes escalares. Como veremos a continuación, para describir matemáticamente un vector en el espacio de tres dimensiones necesitamos especificar tres números denominados *componentes* del mismo respecto de un triedro coordenado de referencia (el triedro se estudiará en la sección siguiente). Cuando el vector se expresa con respecto a otro sistema de referencia, sus componentes cambian. Por el contrario, puesto que las magnitudes escalares no tienen asociado este concepto de dirección su valor es independiente del sistema de referencia escogido.

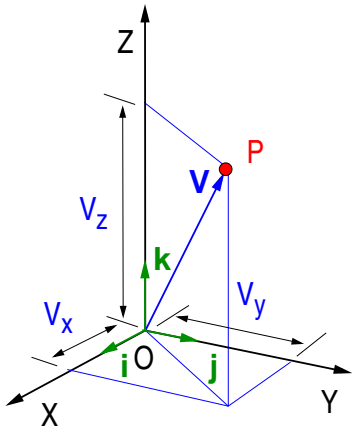


Figura 1.2: Sistema de referencia cartesiano.

Desde el punto de vista de su localización en el espacio los vectores se clasifican así:

- *Libres*: Pertenecen a un espacio vectorial abstracto y no están localizados en ningún punto del espacio. Por ejemplo, el vector velocidad angular de un sólido es un vector que no está vinculado a ningún punto (tampoco al centro del sólido, cuando éste tenga centro, aunque sea éste el lugar donde se suele dibujar al ilustrar un problema).
- *Deslizantes*: Dado un vector, el espacio queda dividido en rectas con la misma dirección del vector. Se llama “vector deslizante” a un vector que se puede deslizar a lo largo de alguna de estas rectas (llamadas “rectas de acción” o “rectas de aplicación”) sin que su efecto físico cambie. Sin embargo, no puede abandonar su recta de acción. Por ejemplo,

Como veremos seguidamente, en la Física es esencial distinguir los vectores de las magnitudes escalares. Para diferenciarlas, las magnitudes vectoriales se indican mediante una flecha \vec{A} , mediante su punto de inicio y final $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$ ó con letras en negrita $\mathbf{A} = \vec{A} = \overrightarrow{OP}$. Su módulo,

$$|\overrightarrow{OP}| = |\mathbf{A}| = |\vec{A}| = A,$$

se indica mediante una letra sin negrita o mediante el símbolo de vector entre dos barras verticales. Estas notaciones son totalmente equivalentes. En estas notas se escribirán las magnitudes vectoriales en negrita \mathbf{A} y su módulo como A .

Desde el punto de vista de su localización en el

no se puede distinguir la aplicación de una fuerza a un sólido empujándolo o tirando de él mediante una cuerda que tenga la dirección de la recta de acción de la fuerza: el efecto es el mismo. En cambio, si se tira con la cuerda desde otro lugar o se cambia la cuerda de dirección, el efecto ya no es el mismo.

- *Ligados* o *fijos*: Están localizados en un punto. Por ejemplo, en un instante dado la velocidad del viento en un punto en el que hay un anemómetro.

Dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son *iguales* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ cuando tienen el *mismo módulo dirección y sentido*. Si sólo difieren en su sentido serán *opuestos* $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ y entendemos por vector *nulo* aquel de módulo cero. Los vectores, \mathbf{A} y \mathbf{B} son *equipolentes* cuando tienen *igual dirección, sentido y módulo pero pueden tener distinto origen y distinta recta de acción*. Es decir, dos vectores son equipolentes cuando son iguales en tanto que vectores libres.

1.3. Componentes cartesianas de un vector

Un *triedro* o *sistema de referencia cartesiano* $S(O, X, Y, Z)$ como el de la Fig. 1.2 está formado por tres ejes mutuamente perpendiculares (X, Y, Z) que se cruzan en un punto común O , que denominamos *origen*. Los tres vectores libres \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} paralelos a los ejes y de módulo unidad constituyen lo que se denomina una base vectorial.

Es muy frecuente expresar un vector \mathbf{V} en tres dimensiones por sus *proyecciones* o *componentes* a lo largo de los ejes del sistema $S(O, X, Y, Z)$. Decimos entonces que (V_x, V_y, V_z) son sus componentes *cartesianas* o *rectangulares* en la base vectorial. Como veremos en la siguiente sección, el vector \mathbf{V} se expresa entonces como

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} \quad (1.1)$$

El vector \mathbf{V} , como entidad geométrica con su dirección, módulo, sentido (y recta soporte, cuando se trate de un vector deslizante), es la misma con independencia del triedro que se emplee para designarlo. Pero sus componentes varían bajo un cambio del sistema de referencia $S(O, X, Y, Z)$ al triedro $S'(O', X', Y', Z')$. Es decir, sus componentes $(V_{x'}, V_{y'}, V_{z'})$ en S' serán diferentes de sus componentes en S (V_x, V_y, V_z) . Ésta es una diferencia importante entre los vectores y las magnitudes escalares, ya que estas últimas toman el mismo valor en cualquier sistema de referencia. Sin embargo, el módulo $V = |\mathbf{V}|$ permanece inalterado, ya que la cantidad $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ no varía ni con rotaciones ni con traslaciones.

En el caso en que $\mathbf{V} \equiv \mathbf{r}_p$ es el vector \overrightarrow{OP} que une el origen O con el punto P , sus componentes son las coordenadas de dicho punto. Decimos entonces que $\mathbf{r}_p = \overrightarrow{OP}$ es el *vector de posición* del punto P respecto del triedro $S(O, X, Y, Z)$ y a partir de la Fig. 1.2 resulta evidente que,

$$|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

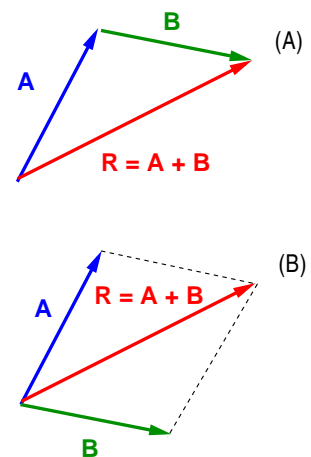


Figura 1.3: (A) Suma de dos vectores y (B) su suma mediante la regla del paralelogramo.

es el módulo del vector \mathbf{V} . Para el vector de posición del punto P tendremos que

$$|\mathbf{r}_p| = r_p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es justamente la distancia a P desde el origen. Como se desprende de la Fig. 1.2 todos los puntos Q que se encuentran a la misma distancia del punto O están sobre la superficie de una esfera de radio $r_Q = |\mathbf{r}_Q|$.

Desde un punto de vista matemático, una magnitud de carácter vectorial es aquella cuyas componentes se transforman bajo un cambio de coordenadas mediante una matriz ortogonal, como se estudiará en álgebra.

1.4. Operaciones con vectores

Los vectores admiten operaciones entre ellos cuyo resultado puede ser un nuevo vector o también un escalar. La *suma* y *diferencia* de vectores, el producto por un escalar y el *producto vectorial* dan como resultado un nuevo vector. En cambio, el *producto escalar* entre dos vectores proporciona un escalar.

1.4.1. Producto por un escalar y vectores unitarios

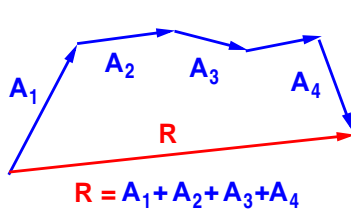


Figura 1.4: Representación geométrica de la suma de cuatro vectores.

Se llama *versor* o *vector unitario* a un *vector de módulo unidad*, por ejemplo los versores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} definidos en la sección anterior. Para obtener un versor a partir de cualquier vector basta dividir entre su módulo. Dado el vector \mathbf{A} , el vector,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{A} \mathbf{A}$$

es un vector de módulo unidad adimensional que tiene el mismo sentido y recta de aplicación que el vector \mathbf{A} original.

1.4.2. Suma y resta de vectores

Como muestra la Fig. 1.3, dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} con origen común definen un plano en el espacio y su *suma* es otro vector $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ que se obtiene llevando el origen de un vector al extremo del otro. Equivalentemente, si se unen los dos orígenes de \mathbf{A} y \mathbf{B} su suma \mathbf{R} coincide con la diagonal del paralelogramo que forman (regla del paralelogramo).

Para un sistema de N vectores \mathbf{A}_i ($i = 1, \dots, N$) el vector suma $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_N$ se obtiene como se indica en la Fig. 1.4: se disponen los vectores equipolentes correspondientes

a cada uno de los sumandos de modo que el extremo de cada uno coincida con el origen del siguiente. Al vector \mathbf{R} se le denomina *resultante* del sistema de vectores.

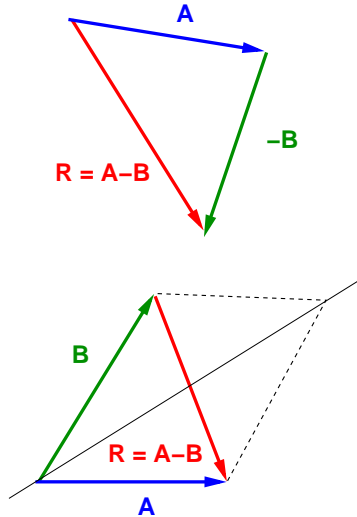


Figura 1.5: Diferencia de dos vectores.

La suma de vectores es *conmutativa*, $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, y *asociativa*,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Como se observa en la Fig. 1.5 el vector *diferencia* o *resta* de dos vectores $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ es el nuevo vector que resulta de sumar el vector opuesto siguiendo la regla del paralelogramo.

El producto por un escalar y la suma de vectores nos permiten escribirlos en función de sus componentes a lo largo de los ejes respecto de un triedro coordenado. El vector \mathbf{V} de la Fig. 1.2 puede escribirse como la suma

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

de tres vectores a lo largo de cada uno de los ejes. En consecuencia, la suma de dos vectores,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

será el vector

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$

y las expresiones para la diferencia de vectores son análogas. La suma (o diferencia) de los N vectores \mathbf{A}_i ($i = 1, \dots, N$) anteriores es

$$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^N A_{xi} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^N A_{yi} \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^N A_{zi} \right) \mathbf{k}.$$

1.4.3. Producto escalar

El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} es un escalar cuyo valor es el producto de los módulos de ambos vectores por el coseno de ángulo θ que forman:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta.$$

Como se observa en la Fig. 1.6 la distancia $|\overline{OP}| = |\mathbf{A}| \cos \theta$ es la proyección del vector \mathbf{A} sobre la dirección del vector \mathbf{B} . Por tanto, el producto escalar de dos vectores perpendiculares

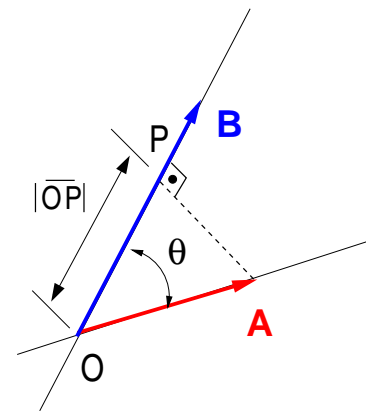
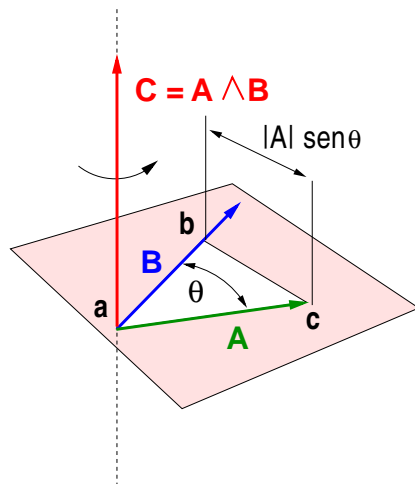


Figura 1.6: Producto escalar de dos vectores.

($\theta = \pi/2$) es nulo y el de un vector consigo mismo ($\theta = 0$) igual a su módulo al cuadrado, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$.

El producto escalar es *conmutativo*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, y *asociativo* respecto de la multiplicación por un escalar, $(m \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (m \mathbf{B})$, y también cumple la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

Empleando estas relaciones, para los vectores unitarios ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) del sistema coordenado $S(O, X, Y, Z)$ de la Fig. 1.2 tendremos,



$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

y también,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

La componente X de un vector es simplemente, $A_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{A}$ (análogamente para la Y y Z). La definición de producto escalar se emplea con frecuencia para dar la siguiente fórmula del coseno del ángulo que forman:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|}.$$

Figura 1.7: Producto vectorial de dos vectores.

Podemos calcular el producto escalar de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} cualesquiera en función de sus componentes cartesianas. En virtud de la propiedad distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Como caso particular,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2$$

1.4.4. Producto vectorial

El *producto vectorial* de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} que forman un ángulo θ es un nuevo *vector* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ cuyo módulo es

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta.$$

Su dirección es perpendicular al plano que definen \mathbf{A} y \mathbf{B} y, como se muestra en la Fig. 1.7, su sentido es el del avance de un sacacorchos cuando se gira el vector \mathbf{A} hacia el \mathbf{B} por el camino más corto. Coincide con el sentido en el que apunta el pulgar de la mano derecha cuando el camino más corto de \mathbf{A} a \mathbf{B} está indicado por los demás dedos de la mano, considerados como flechas con las puntas en las uñas. En estas notas representaremos el producto vectorial como $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, aunque es muy común escribirlo también como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e incluso $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ en algunos textos.

El producto vectorial es *anticonmutativo*, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$, y *distributivo* respecto de la suma de vectores, $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$. El producto de dos vectores paralelos ($\theta = 0$) es nulo y para la multiplicación por un escalar a tenemos,

$$a(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge (a\mathbf{B}).$$

Geoméricamente, la cantidad $|\mathbf{A}| \sin \theta$ es la proyección del vector \mathbf{A} sobre la dirección perpendicular a \mathbf{B} . Es decir, que $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|$ es el doble del área del triángulo abc de la Fig. 1.7.

Aplicando las propiedades anteriores a los vectores unitarios del sistema de referencia cartesiano de la Fig. 1.2 tendremos

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0,$$

mientras que los productos entre ellos siguen una relación circular,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Estas expresiones definen unívocamente el sentido positivo de los ejes del triedro cartesiano de la Fig. 1.2, pues un cambio en el sentido de cualquiera de los versores ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) altera los anteriores productos vectoriales. Por este motivo se dice que el *triedro* es *orientado*, y cuando tienen el sentido habitual, que es el indicado en la Fig. 1.2, se dice que el triedro $S(O, X, Y, Z)$ esta *orientado a derechas*.

Si expresamos los vectores $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ en función de sus componentes cartesianas podemos calcular su producto vectorial,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \wedge (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

y empleando las relaciones anteriores obtenemos,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

Es frecuente escribir este mismo resultado de modo simbólico empleando la notación y las reglas empleadas para el cálculo de determinantes,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (1.2)$$

Como el resultado del producto $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es un vector podemos multiplicarlo de nuevo vectorialmente para formar un *doble* producto vectorial, $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$. El resultado es un vector perpendicular al plano formado por \mathbf{A} y $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ que viene dado por,

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

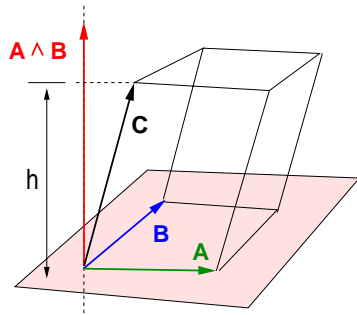
Este resultado se conoce como “regla de la expulsión”. El producto vectorial no tiene la propiedad asociativa,

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C},$$

sino que satisface la “identidad de Jacobi”:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) + \mathbf{C} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

1.4.5. Producto mixto



Para tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} podemos combinar el producto vectorial con el escalar para formar el *producto triple* $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$. El resultado de esta operación será obviamente un *escalar* y, expresados los vectores en sus componentes cartesianas, tendremos

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Figura 1.8: Producto mixto de tres vectores.

De nuevo, utilizando las propiedades de los determinantes es fácil ver que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}).$$

Puesto que el producto mixto de tres vectores no cambia bajo permutación circular, pero cambia de signo bajo permutación no circular, con frecuencia se emplea la última notación de la expresión precedente, con las propiedades:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}) = (\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = -(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}) = -(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}) = -(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}).$$

Como se observa en la Fig. 1.8, el producto mixto admite una interpretación geométrica. Su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo que forman tres vectores equipolentes a los dados y con un origen común.

1.4.6. Momento de un vector respecto de un punto y respecto de un eje

Como veremos a lo largo del curso, en la Física se emplea la palabra *momento* para definir cantidades que pueden ser escalares o vectoriales. En el cálculo vectorial el *momento de un vector* respecto de un punto es un vector y en cambio es un escalar el *momento de un vector respecto de un eje*.

Definimos el *momento de un vector* \mathbf{A} respecto del punto O como el vector $\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \wedge \mathbf{A}$ donde \mathbf{r} es el vector que une el punto O con un punto P de la recta EE' soporte del vector A .

Como se deduce de la Fig. 1.9 (A), el módulo del momento $|\mathbf{M}_o|$ y su dirección son independientes del punto P elegido sobre EE' . Si Q es el punto de la recta EE' donde la distancia $|\mathbf{r}_Q| = |\overrightarrow{OQ}|$ es mínima, siempre podemos descomponer el vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$ y entonces,

$$|\mathbf{M}_o| = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{A}| = |\mathbf{OQ} \wedge \mathbf{A}| + |\mathbf{QP} \wedge \mathbf{A}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{OQ}|$$

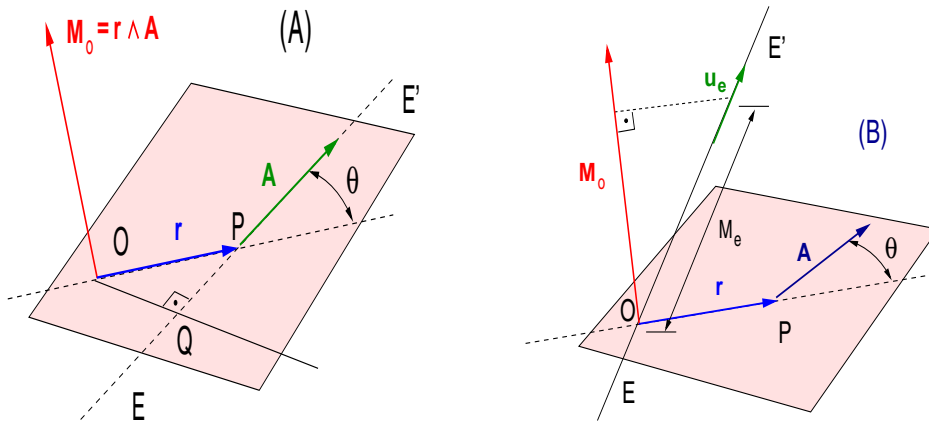


Figura 1.9: (A) Momento \mathbf{M}_o de un vector respecto del punto O y (B) Momento M_e de un vector respecto del eje EE' . En la figura de la derecha el ángulo recto no debe ser el señalado. Para hallar gráficamente M_e se debe proyectar el vector \mathbf{M}_o sobre la recta EE'

siempre, para cualquier elección de P sobre la dirección de \mathbf{A} .

El momento respecto de O expresado en función de sus componentes viene dado por,

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Como hemos visto anteriormente para el sistema de referencia cartesiano podemos definir un eje EE' mediante un versor \mathbf{u}_e como se indica en la Fig. 1.9 (B). El momento del vector \mathbf{A} respecto del eje EE' es un *escalar* que resulta de proyectar su vector momento \mathbf{M}_o respecto de un punto cualquiera O del eje a lo largo del eje considerado,

$$M_e = \mathbf{M}_o \cdot \mathbf{u}_e = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_e.$$

Si empleamos la expresión 1.3 tendremos,

$$M_e = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_e = \begin{vmatrix} x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

El momento del vector respecto de un eje no depende del punto O considerado a lo largo del mismo. Además, si la recta soporte del vector \mathbf{A} y el eje EE' son paralelos entonces M_e es nulo.

1.5. Sistemas coordenados

Los vectores quedan determinados mediante sus tres componentes respecto de un triedro coordinado y suele ser conveniente especificarlas empleando diferentes *sistemas coordenados*. La razón es que se encuentran ecuaciones más sencillas cuando el sistema coordinado utilizado respeta las simetrías del problema. Vamos a introducir los tres sistemas coordenados mas comunes haciendo referencia a la posición de un punto en el espacio, aunque se pueden emplear también con cualquier otra magnitud vectorial.

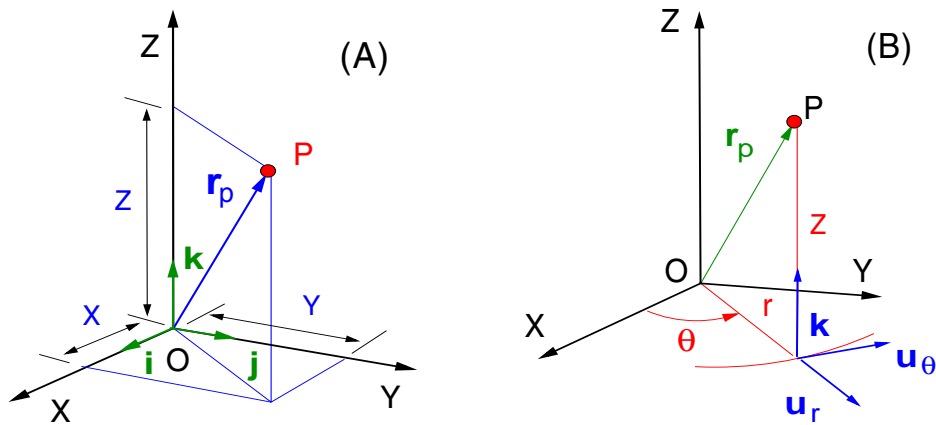


Figura 1.10: (A) Coordenadas cartesianas rectangulares del punto P y (B) coordenadas cilíndricas.

El sistema cartesiano ya se introdujo para un vector genérico \mathbf{V} (Fig. 1.2 y Sec. 1.3). La posición del punto P está determinada por el vector \mathbf{r}_p como se muestra en la Fig. 1.10 (A). Las *coordenadas cartesianas rectangulares* caracterizan la posición de dicho punto respecto de un triedro (O, X, Y, Z) mediante las proyecciones del vector de posición,

$$\mathbf{r}_p = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

del punto P a lo largo de los tres ejes perpendiculares. Este sistema suele ser aconsejable cuando las tres direcciones del espacio son variables independientes.

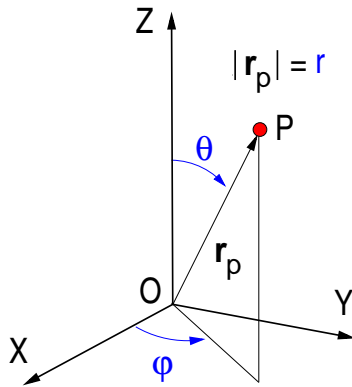
Si el problema tiene simetría acimutal o cilíndrica con respecto a un eje o la variable fundamental del problema es la distancia a un eje, suele ser conveniente emplear las *coordenadas cilíndricas* en las que la posición de P se caracteriza mediante su coordenada z , la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) y el ángulo θ que forma ésta última con el eje X . Como se deduce de la Fig. 1.10 (B), la relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas es,

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y la posición del punto P se especifica mediante las cantidades (r, θ, z) . Las superficies con $r = \text{cte.}$ son cilindros concéntricos cuyo eje de simetría contiene al versor \mathbf{k} .

Para este sistema coordinado podemos definir unos vectores unitarios a lo largo de la dirección radial y la del ángulo θ como se indica en la figura. Tendremos,

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$



que junto con el vector unitario \mathbf{k} satisfacen los productos vectoriales:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}$$

Como veremos más adelante, estos vectores unitarios son muy útiles cuando por ejemplo, una partícula se mueve describiendo una circunferencia, ya que \mathbf{u}_θ es paralelo a su velocidad.

Figura 1.11: Coordenadas esféricas del punto P .

Finalmente, podemos encontrarnos con situaciones con simetría esférica en donde suele ser aconsejable emplear *coordenadas esféricas*. Como se observa en la Fig. 1.11, la posición del punto P está determinada ahora por la distancia $r = |\mathbf{r}_p|$ al origen O , el ángulo θ que forma \mathbf{r}_p con el eje Z y el que forma la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) . Tendremos entonces,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

resultando la posición de P especificada por las cantidades (r, θ, φ) . El ángulo θ varía entre 0 y π de modo que cuando $\theta = 0$ el vector \mathbf{r}_p es paralelo al versor \mathbf{k} y cuando $\theta = \pi$ apunta en la dirección $-\mathbf{k}$. En cambio tenemos que $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ de modo que cuando $\varphi = \pi$ la proyección de \mathbf{r}_p en el plano (X, Y) apunta en la dirección $-\mathbf{i}$. Lo mismo que en los sistemas coordenados cilíndrico y cartesiano podemos definir un triedro de vectores unitarios $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ a lo largo de cada dirección.

Puesto que las superficies con $r = \text{cte.}$ son esferas con centro en el origen O , este sistema coordenado es muy útil en problemas que tengan simetría alrededor de un punto central, o en los que el parámetro fundamental sea la distancia r del punto al origen.

1.6. Funciones vectoriales y escalares

Un vector $\mathbf{A}(t)$ es una función de variable escalar t cuando lo es alguna de sus componentes. Se trata de una función que asigna a cada valor del parámetro $t = t_o$ un vector $\mathbf{A}_o = \mathbf{A}(t_o)$. Podemos expresarlo de la forma,

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k} \quad (1.4)$$

en donde las componentes $A_x(t)$, $A_y(t)$ y $A_z(t)$ son funciones reales de la variable real t .

Este es un modo habitual de *describir una curva* en el espacio en tres dimensiones. Por ejemplo, habitualmente expresaremos la posición de un punto en el espacio como función del tiempo mediante un *vector de posición* $\mathbf{r}(t)$. Sus posiciones en los instantes sucesivos t_1, t_2, \dots

vendrán especificadas mediante un conjunto de vectores $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2), \dots$ como se muestra en la Fig. 2.1.

Además del vector de posición $\mathbf{r}(t)$ son funciones vectoriales que dependen del tiempo la aceleración $\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ y la velocidad $\mathbf{v}(t)$ de un punto (sección 2.1).

En la Física también tratamos con magnitudes que pueden ser *escalares* $P(\mathbf{r}) = P(x, y, z)$ o *vectoriales* $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x, y, z)$ y que se encuentran definidas sobre regiones del espacio, es decir, dependientes del vector de posición $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

Un *campo escalar* es una función que asigna a cada punto del espacio \mathbf{r} el valor de una magnitud escalar $P(\mathbf{r})$. Cuando el campo escalar es función de una variable entonces se puede emplear la representación gráfica habitual, ya conocida por el alumno, que consiste en dibujar el conjunto de puntos $\{(x, P(x))\}$ enmarcado en ejes cartesianos (x, P) . Cuando el campo escalar es función de dos variables se dibuja, mediante un dibujo en perspectiva, el conjunto de puntos $\{(x, y, P(x, y))\}$.

Cuando el campo escalar es función de tres variables una representación como las anteriores ya no es posible, porque no estamos acostumbrados a representar perspectivas de objetos de cuatro dimensiones (x, y, z, P) . En este caso se puede dibujar el lugar geométrico de los puntos en donde la función toma un cierto valor. Se obtienen así las llamadas isosuperficies las cuales vienen dadas por las ecuación $P(x, y, z) = \text{constante}$. Un ejemplo se muestra en la Fig. 1.12.

Como veremos más adelante, son funciones escalares el potencial gravitatorio $U(\mathbf{r})$ (sección 4.4.2) o el potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$ (sección 4.4.3).

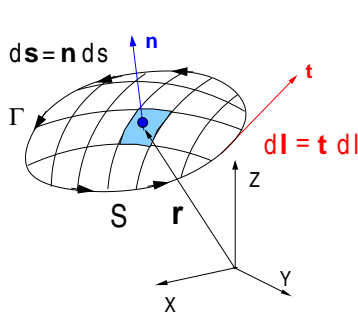


Figura 1.13: Superficie S que se apoya en la curva Γ .

Análogamente, un *campo vectorial* es una función que asigna un vector $\mathbf{V}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de una cierta región del espacio. Cada una de las componentes del vector corresponden a una función escalar de modo que,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

Un ejemplo de campo vectorial es el campo electrostático $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (sección 4.2.1.2) que es constante en el tiempo en cada punto del espacio \mathbf{r} .

Por último, los campos escalares y vectoriales también pueden depender del tiempo y entonces tendremos $P(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

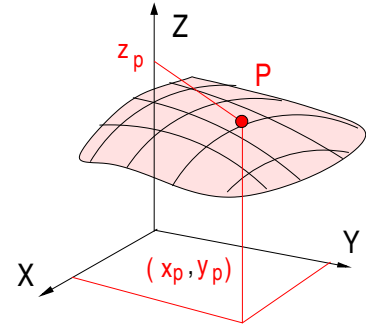


Figura 1.12: Isosuperficie de la función escalar $P(x, y, z)$ (P toma el mismo valor en cualquier punto de la superficie representada).

1.6.1. Curvas y superficies: Convenio de signos

Los vectores unitarios introducidos en la pág. 4 se utilizan además para definir la *orientación* de curvas y superficies en el espacio. En la figura 1.13 se muestra una superficie S delimitada por una curva Γ en la que se apoya.

La orientación de una superficie en el espacio se caracteriza mediante un vector unitario \mathbf{n} perpendicular a la misma en cada punto y cuando es cerrada se toma \mathbf{n} a lo largo de la *normal exterior* a la misma. El elemento de superficie es $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la misma en cada punto y dS el elemento de área.

Podemos también definir el vector $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ sobre la curva Γ , en donde dl es el elemento de longitud y \mathbf{t} un vector unitario tangente a la curva en cada punto como se indica en la Fig. 1.13. El sentido *positivo* del recorrido de Γ se toma como se indica en la figura 1.13, es decir, con la regla de la mano derecha (el pulgar apunta según \mathbf{n} cuando el resto de los dedos siguen la dirección de \mathbf{t} .)

1.6.2. Derivada de una función vectorial respecto de un parámetro

Podemos calcular la derivada de la función vectorial $\mathbf{A}(t)$ (Ec. 1.4) respecto del parámetro t empleando directamente su definición,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}$$

También pueden definirse derivadas sucesivas de la función,

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)$$

Las reglas de derivación de funciones vectoriales son muy semejantes a las de una función real. A partir de las propiedades anteriores pueden deducirse las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\lambda \mathbf{A}(t)) &= \lambda \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \wedge \mathbf{B}(t)] &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \wedge \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \wedge \frac{d\mathbf{B}}{dt} \end{aligned}$$

Si una función vectorial $\mathbf{A}(t) = A(t) \mathbf{u}$ apunta siempre a lo largo de una dirección constante \mathbf{u} , su derivada,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \mathbf{u} = \dot{A}(t) \mathbf{u}$$

apunta a lo largo de la misma dirección.

Si el módulo de una función vectorial $|\mathbf{A}(t)| = A$ es constante, su extremo se mueve sobre una superficie esférica de radio A . Además, su derivada es perpendicular a la función pues tendremos,

$$\frac{d}{dt}(A^2) = 0 = \frac{d}{dt} |\mathbf{A}|^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2 \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = 0 \quad \text{Luego, } \mathbf{A}(t) \perp \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

1.6.3. Integración de una función vectorial respecto de un parámetro

Para una función vectorial de un parámetro $\mathbf{A}(t)$ definimos su integral indefinida como la función vectorial $\mathbf{B}(t)$ tal que,

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad \text{que notaremos como,} \quad \mathbf{B}(t) = \int \mathbf{A}(t) dt$$

y si \mathbf{C} es un vector constante cualquiera $\mathbf{B}(t) + \mathbf{C}$ también es la integral de $\mathbf{A}(t)$. La integral definida en el intervalo $[t_a, t_b]$ se obtiene dividiendo este en N subintervalos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ siendo $t_a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_b$ de modo que,

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{A}(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}(t_i) \Delta t_i$$

Es una definición muy similar a la de Riemann salvo que el integrando es una función vectorial. Aplicando las reglas anteriores podemos expresarla en sus componentes,

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{A}(t) dt = \left(\int_{t_a}^{t_b} A_x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_y(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_z(t) dt \right) \mathbf{k}$$

considerando que los versores del sistema de referencia cartesiano son constantes. Las integrales de las tres componentes $A_x(t)$, $A_y(t)$ y $A_z(t)$ cumplen las reglas del cálculo vectorial.

1.6.4. Integral de línea

Las operaciones con vectores permiten definir operaciones más complejas que involucran la integral de una función vectorial. Como veremos seguidamente, la *integral de línea* o *circulación* de un vector es un concepto necesario para introducir el *trabajo* de una fuerza ¹.

Como hemos visto, en la Sec. 1.6 una curva C en el espacio (por ejemplo, la trayectoria de un punto) puede describirse mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que depende de un parámetro (el tiempo en el caso de una trayectoria). Consideremos además que una función vectorial está definida en la misma zona del espacio,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(\mathbf{r}) \mathbf{i} + V_y(\mathbf{r}) \mathbf{j} + V_z(\mathbf{r}) \mathbf{k}$$

de modo que en cada punto de la curva C la función vectorial toma el valor $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$.

Como muestra la Fig. 1.14 entre dos puntos de la curva A y B dados podemos dividirla en N tramos pequeños de longitud $|\Delta \mathbf{r}_j|$ definidos por los vectores $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$ donde la función vectorial toma los valores $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j)$. En cada uno de los $j = 1, \dots, N + 1$ puntos podemos construir los productos escalares,

$$\mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j = |\mathbf{V}_j| |\Delta \mathbf{r}_j| \cos \theta_j$$

en donde θ_j es el ángulo que forma a lo largo de la curva el vector $\Delta \mathbf{r}_j$ con el vector \mathbf{V}_j . Puesto que el resultado de cada producto escalar es un número podemos sumarlos,

¹La integral de línea se introduce en la Sec. 8.2, pags. 203-206 Vol I de la Ref. [1] en el contexto del *trabajo* de una fuerza.

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j$$

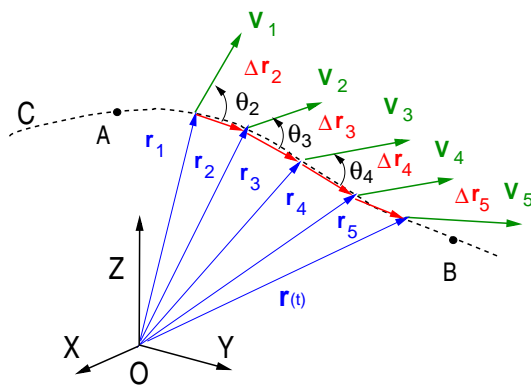


Figura 1.14: Curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ en un campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$.

y considerar un límite, haciendo que el número de tramos N en que dividimos la curva C entre A y B aumente indefinidamente, y las distancias $|\Delta \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|$ sean cada vez más pequeñas.

Entonces, el vector $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} \rightarrow d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ es paralelo al vector \mathbf{t} tangente a la curva en cada punto cuyo módulo infinitesimal es la longitud de arco dl . Tendremos entonces,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j \rightarrow \int_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Esta última expresión se denomina *integral de línea* del campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a lo largo de la curva C entre los puntos A y B considerados. Al vector $d\mathbf{l}$ se le aplican los criterios discutidos en la Pág. 12 sobre el sentido de recorrido de la curva C .

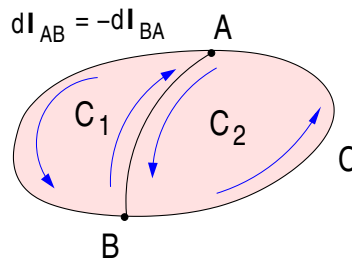


Figura 1.15: La curva cerrada C se descompone en dos C_1 y C_2 .

Cuando la curva es cerrada se suele indicar en el signo integral mediante,

$$I = \oint_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

y a esta integral de línea se la denomina *circulación* del campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a lo largo de la curva C .

Además, si la curva es una función suave, como se muestra en la Fig. 1.6.4, puede descomponerse en dos curvas C_1 y C_2 que comparten un tramo común AB . Si extendemos la integral de línea sobre los bordes de cada uno de los dos recintos de la Fig. 1.6.4 tendremos,

$$I = \oint_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Evidentemente la circulación del campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ en el sentido AB será igual y cambiada de signo a la del sentido BA y a lo largo de este tramo $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$,

$$\int_A^B \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_A^B \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2.$$

2.1. Posiciones, velocidades y aceleraciones

Una partícula material es un objeto cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con las distancias que recorre en su movimiento. Se trata de una aproximación en la que consideramos solamente los movimientos de traslación de los objetos, que son caracterizados como puntos de masa m . Su posición \mathbf{r} en el espacio se determina mediante un punto geométrico y por lo tanto por un vector respecto de un triedro de referencia $S(O, X, Y, Z)$ de origen O como se observa en la Fig. 2.1.

Las coordenadas de \mathbf{r} cambian en el curso del tiempo a medida que se desplaza. La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que nos dice dónde se encuentra el punto material en cada instante se denomina *ley horaria* del móvil. En coordenadas cartesianas la ley horaria se expresa:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

La *trayectoria* del móvil es el lugar geométrico de los puntos del espacio por los que pasa, es decir, el conjunto $\{\mathbf{r}(t)\}$, donde t recorre el intervalo de tiempo considerado. Una misma

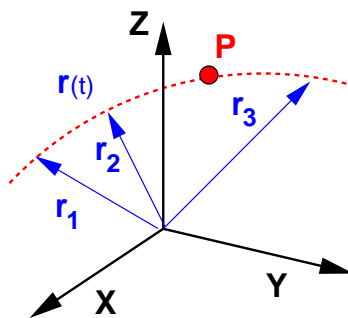


Figura 2.1: Trayectoria de la partícula P descrita mediante su vector de posición $\mathbf{r}(t)$ respecto de un triedro.

trayectoria puede recorrerse con leyes horarias distintas. Por ejemplo, todos los coches que van de Bilbao a Madrid (por la misma autopista) tienen la misma trayectoria, pero la recorren con distintas leyes horarias.

El vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ es la derivada de $\mathbf{r}(t)$ con respecto del tiempo:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Al efectuar la derivación respecto de un triedro S fijo, cuya posición permanece invariable en el tiempo se toman los vectores unitarios ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) constantes por lo que tendremos,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

donde $dx/dt, dy/dt$ y dz/dt son las componentes del vector velocidad en el sistema S . En los apuntes se escribirá un punto sobre la variable para indicar la derivada temporal de una cantidad escalar o vectorial, por ejemplo $\dot{x}(t) \equiv dx/dt$ o $\dot{\mathbf{A}} \equiv d\mathbf{A}/dt$. El módulo de un vector se escribirá como el vector entre barras (por ejemplo $|\mathbf{v}|$) o simplemente la letra sin negrita (v).

Si introducimos el arco Δs pequeño de la curva (trayectoria) que recorre la partícula durante el tiempo Δt (Fig. 2.2) resulta,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \times \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

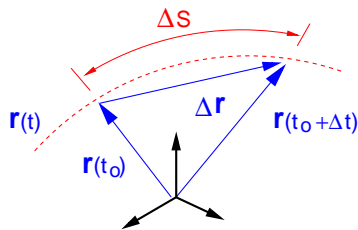


Figura 2.2: Arco Δs de la trayectoria de la partícula.

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ tendremos $\Delta s/\Delta t \rightarrow |\mathbf{v}|$, que es el módulo del vector velocidad y $\Delta \mathbf{r}/|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \boldsymbol{\tau}$, que es un vector unitario ($|\boldsymbol{\tau}| = 1$) tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en todo instante.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \times 1 \times |\mathbf{v}| = v \boldsymbol{\tau}$$

Además, el vector $\boldsymbol{\tau}$ y su derivada han de ser perpendiculares puesto que si derivamos,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = 0$$

La aceleración de la partícula se calcula derivando de nuevo el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ respecto del tiempo,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

y también podemos obtenerla a partir del vector $\mathbf{v} = v(t) \boldsymbol{\tau}$,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v(t) \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \quad (2.1)$$

donde necesitamos calcular la derivada del vector tangente respecto del tiempo,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$$

Nótese que $\boldsymbol{\tau}$ tiene longitud constante (es unitario) y que cualquier variación temporal sólo puede ser debido a un cambio de su dirección o sentido. Como indica la Figura 2.3, durante un tiempo Δt pequeño podemos considerar que gira un ángulo $\Delta\varphi$ de modo que el vector diferencia $\Delta\boldsymbol{\tau}$ en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ apuntará en la dirección de la normal a la trayectoria y tendremos,

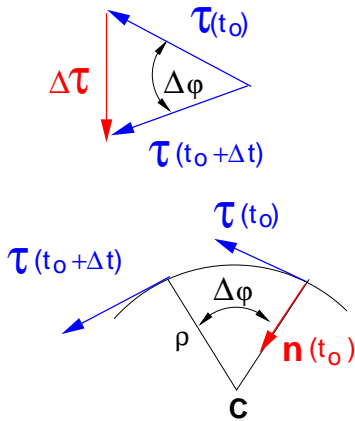


Figura 2.3: Ángulo $\Delta\varphi$ que rota alrededor del punto C el vector unitario tangente $\boldsymbol{\tau}(t)$ durante el pequeño intervalo de tiempo Δt .

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\varphi} \times \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

siendo $\Delta\varphi$ el ángulo entre $\boldsymbol{\tau}(t_0)$ y $\boldsymbol{\tau}(t_0 + \Delta t)$. Vemos que $\Delta\boldsymbol{\tau}/\Delta\varphi$ es aproximadamente un versor $\mathbf{n}(t_0)$ normal a $\boldsymbol{\tau}(t_0)$, contenido en el plano límite definido por $\boldsymbol{\tau}(t_0)$ y $\boldsymbol{\tau}(t_0 + \Delta t)$ y que apunta hacia la concavidad de la curva. Teniendo en cuenta que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ se cumple $\Delta s/\Delta t \rightarrow v$ y definiendo el radio de curvatura como¹

$$\frac{1}{\rho} \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad (2.2)$$

se obtiene

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}(t)$$

Utilizando el resultado anterior en la ecuación 2.1 resulta finalmente,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (2.3)$$

El primer sumando corresponde a la componente *tangencial* $\mathbf{a}_\tau = (dv/dt) \boldsymbol{\tau}$ del vector aceleración y el segundo es la aceleración *centrípeta* $\mathbf{a}_n = (v^2/\rho) \mathbf{n}$ o *normal*. Multiplicando vectorialmente la ecuación 2.3 por \mathbf{v} y tomando módulo, se obtiene

$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}|}$$

que proporciona el radio de curvatura en función de la velocidad y la aceleración.

Obsérvese que ρ es una característica local, es decir, en general es diferente en cada uno de los puntos de la trayectoria. Depende solo de la forma de la trayectoria, como se ve en (2.2). Sin embargo puede calcularse a partir de la velocidad y aceleración de un punto que tenga la trayectoria dada y la recorra con una ley horaria $\mathbf{r}(t)$ cualquiera. Eso sucede porque la

¹Puede consultarse la sección 5.8, pags. 104 y 105 del Vol I de la Ref. [1].

velocidad y la aceleración no son independientes, sino que la trayectoria les obliga a mantener la relación precedente.

Obviamente, si el movimiento es circular el radio de curvatura es igual al radio ($\rho = R$) de la circunferencia que describe la partícula y si la trayectoria es una recta ($\rho = \infty$) no existirá aceleración normal. Cuando $\mathbf{a} = 0$ el movimiento es rectilíneo y uniforme, resultando rectilíneo y acelerado cuando $\mathbf{a}_t \neq 0$ y $\mathbf{a}_n = 0$. Si la aceleración tangencial es nula ($\mathbf{a}_t = 0$) y $\mathbf{a}_n \neq 0$ el movimiento será curvilíneo y la trayectoria será una circunferencia o una hélice si además $|\mathbf{a}_n|$ es constante.

El vector binormal a $\boldsymbol{\tau}$ y a \mathbf{n} se define:

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n}.$$

El triedro a derechas $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ se llama *triedro intrínseco*. A los planos que contienen a las parejas de vectores $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{b} , $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{n} y \mathbf{n} y \mathbf{b} se les denominan planos *tangente*, *osculador* y *normal* respectivamente. Resumiendo los resultados anteriores, dada una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ parametrizada por la longitud de arco s , se tiene

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|} \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|} \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n}.$$

2.2. Movimiento circular

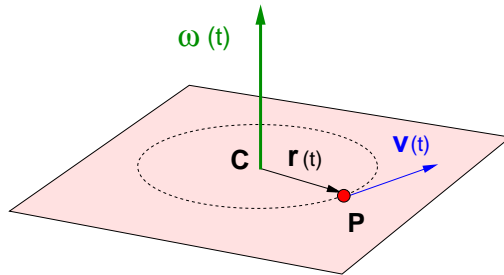


Figura 2.4: Movimiento circular.

Analizaremos el caso sencillo de una partícula P que se mueve sobre un plano describiendo una circunferencia de radio constante $R = |\mathbf{r}(t)|$ como muestra la Figura 2.4. En todo instante de tiempo su posición $\mathbf{r}(t)$ y velocidad $\mathbf{v}(t)$ estarán contenidas en dicho plano, siendo esta última tangente al círculo de radio R y perpendicular al vector $\mathbf{r}(t)$ como muestra la Fig. 2.4.

Podemos introducir el vector *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}(t)$ perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ de modo que,

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{r}(t) \quad (2.4)$$

y, si derivamos de nuevo la Ec. 2.4 respecto del tiempo, obtenemos para la aceleración,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge [\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{r}(t)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Veamos a continuación cómo se escriben las ecuaciones 2.4 y 2.5 en el triedro intrínseco. Cabe destacar que para situar la partícula en su movimiento circular sólo es necesario dar una coordenada, por ejemplo el ángulo θ que forma el vector \mathbf{CP} con el eje x (ver Figuras 2.4 y 2.5). En este caso se dice que el movimiento tiene un único grado de libertad y los vectores posición, velocidad y aceleración se escriben como funciones de θ y sus dos primeras derivadas temporales ($\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$). Es usual ² utilizar, en lugar de $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{n} los vectores $\mathbf{u}_r = -\mathbf{n}$ y $\mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{\tau}$ que, proyectados en el sistema de coordenadas cartesianas, son (ver Fig. 2.5)

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \quad (2.6)$$

Se puede comprobar que los tres vectores $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ forman un triedro a derechas

$$\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k} \quad \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$$

y satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r.$$

Este sistema es adecuado para estudiar el movimiento circular ya que la posición y la velocidad se escriben como $\mathbf{r}(t) = R\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{u}_\theta$. Utilizando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que θ cambia con el tiempo, los vectores posición, velocidad y aceleración del movimiento circular se expresan de la siguiente manera

$$\mathbf{r}(t) = R\mathbf{u}_r \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}[R\mathbf{u}_r(\theta)] = R\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (2.8)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}[R\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta] = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\mathbf{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\mathbf{u}_r \quad (2.9)$$

Las aceleración centrípeta $\mathbf{a}_c = -R\dot{\theta}^2\mathbf{u}_r$ apunta hacia el origen C de la circunferencia de la Fig. 2.5. Con las ecuaciones 2.4, 2.7 y 2.8 se comprueba que los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ son

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \ddot{\theta}\mathbf{k}.$$

y el sentido $\dot{\theta}(t) > 0$ corresponde al del ángulo $\theta(t)$ creciente, como se indica en la Fig. 2.5. Por tanto, en un movimiento circular se tiene $\boldsymbol{\omega}(t) = v(t)/R$.

Por último hay que subrayar que, si empleamos el vector normal $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$, tendríamos un cambio de signo,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} = \mathbf{n} \quad \text{y}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} = -\boldsymbol{\tau} \quad (2.10)$$

²Este vector está definido en la pag. 103 de la sección *complementos* y también puede consultarse la sección 3.4, pags. 94-97 de la Ref. [2].

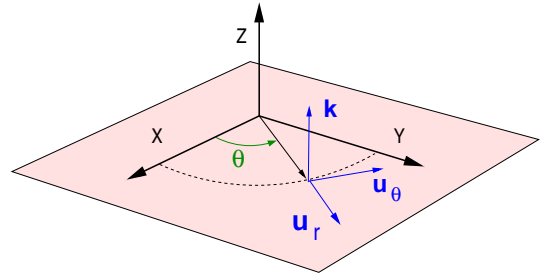


Figura 2.5: Triedro formado por los vectores $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$.

y la aceleración resulta ser $\mathbf{a}(t) = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau} + R\dot{\theta}^2\mathbf{n}$ que es el mismo vector que obtuvimos anteriormente.

2.3. Movimiento en un plano

Como se muestra en la Fig. 2.6 podemos generalizar lo anterior para el movimiento de una partícula P que se mueve en un plano describiendo una trayectoria arbitraria. En esta ocasión son necesarias dos coordenadas para situar la partícula en el plano, por ejemplo la distancia al origen $r(t)$ y el ángulo $\theta(t)$ que forman el vector \mathbf{r} y el eje x . Veamos pues como se expresan los vectores posición, velocidad y aceleración no en el triedro intrínseco, sino en un sistema de coordenadas polares con versores $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ (ver Fig. 2.6). Utilizando la regla de la cadena se obtiene

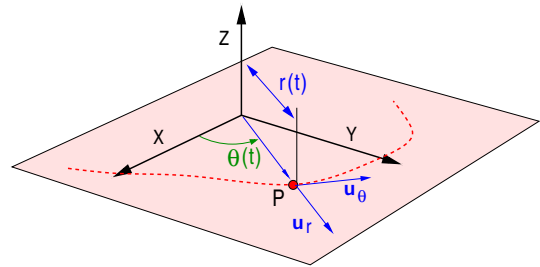


Figura 2.6: Movimiento general de la partícula P cuya trayectoria está contenida en un plano.

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{u}_r \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} [r(t)\mathbf{u}_r] = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r(t)\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \quad (2.13)$$

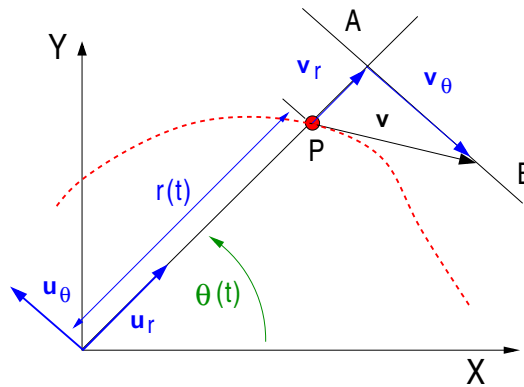


Figura 2.7: Componentes \mathbf{v}_r y \mathbf{v}_θ de la velocidad de P .

La ecuación 2.12 muestra como la velocidad $\mathbf{v}(t)$, que es paralela al vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ a la trayectoria, puede descomponerse en su proyección \mathbf{v}_r a lo largo del versor \mathbf{u}_r y su proyección \mathbf{v}_θ a lo largo de la recta AB paralela al vector unitario \mathbf{u}_θ (ver Fig. 2.3). Por tanto, en general el vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ a la trayectoria de P no será paralelo a \mathbf{u}_θ como en el movimiento circular estudiado anteriormente.

Una cantidad que se utilizará frecuentemente es la energía cinética de la partícula, que en este caso tiene la forma

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Por último, el lector puede comprobar que cuando $r(t) = R$ es constante ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$) recuperamos la velocidad (Ec. 2.8) y aceleración (Ec. 2.9) del movimiento circular y los versores $\boldsymbol{\tau}$ y \boldsymbol{u}_θ son paralelos.

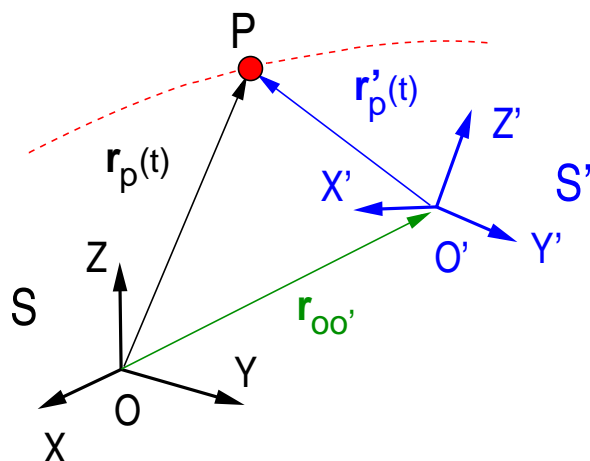


Figura 3.1: La partícula P se mueve respecto de dos triedros S y S' .

En el capítulo anterior hemos considerado el movimiento de un punto P respecto de un triedro S . Sin embargo, la trayectoria de una misma partícula puede ser descrita desde diferentes sistemas coordenados que se encuentran en movimiento a su vez unos respecto a otros. Nuestro objetivo ahora es encontrar expresiones que relacionen las componentes de la velocidad y aceleración respecto de dos triedros coordenados en movimiento relativo.

En la Fig. 3 una partícula P se mueve respecto a dos triedros $S(O, X, Y, Z)$ y $S'(O', X', Y', Z')$ y su ley horaria¹ puede darse por el vector de posición $\mathbf{r}_p(t)$ (vector \mathbf{OP}) o por el vector de posición $\mathbf{r}'_p(t)$ (vector $\mathbf{O'P}$). Los vectores $\mathbf{r}_p(t)$ y $\mathbf{r}'_p(t)$ son distintos, ya que tienen extremos iguales (el punto \mathbf{P}), pero orígenes distintos (los puntos \mathbf{O} y \mathbf{O}'). Dado que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son vectores diferentes, las velocidades de la partícula en S , $\mathbf{v}_P(t) = d\mathbf{r}_P(t)/dt$, y en S' , $\mathbf{v}'_P(t) = d\mathbf{r}'_P(t)/dt$, son en general también diferentes y lo mismo ocurrirá con las aceleraciones $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{a}'(t)$.

¹Para este apartado puede consultarse la sección 7.2, pags. 275-282 de la Ref. [2]

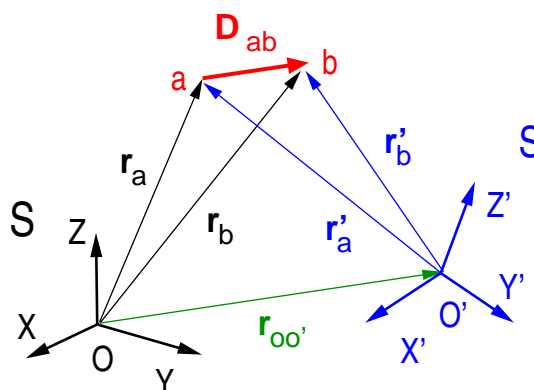


Figura 3.2: El vector D_{ab} respecto de los triédros S y S' .

No hay que confundir un par de vectores distintos, como los $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ del párrafo precedente, con el hecho de que un mismo vector tenga distintas componentes en distintos sistemas de referencia. Por ejemplo, el vector D_{ab} dibujado en la figura 3.2 se puede proyectar tanto en S como en S'

$$\mathbf{D}_{ab} = (x_{bS} - x_{aS}) \mathbf{i} + (y_{bS} - y_{aS}) \mathbf{j} + (z_{bS} - z_{aS}) \mathbf{k} = (x_{bS'} - x_{aS'}) \mathbf{i}' + (y_{bS'} - y_{aS'}) \mathbf{j}' + (z_{bS'} - z_{aS'}) \mathbf{k}'.$$

Las componentes o proyecciones en S ($x_{bS} - x_{aS}$, $y_{bS} - y_{aS}$, $z_{bS} - z_{aS}$) y en S' ($x_{bS'} - x_{aS'}$, $y_{bS'} - y_{aS'}$, $z_{bS'} - z_{aS'}$) son distintas, pero su longitud o módulo es el mismo en ambos sistemas de referencia:

$$\sqrt{(x_{bS} - x_{aS})^2 + (y_{bS} - y_{aS})^2 + (z_{bS} - z_{aS})^2} = \sqrt{(x_{bS'} - x_{aS'})^2 + (y_{bS'} - y_{aS'})^2 + (z_{bS'} - z_{aS'})^2}. \quad (3.1)$$

Aunque lo natural es dar las componentes del vector $\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t)$ en el sistema S y las del vector $\mathbf{O'P} = \mathbf{r}'(t)$ en el sistema S' , en algunos problemas se hace necesario hallar las componentes del vector $\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t)$ en el sistema S' o las del vector $\mathbf{O'P} = \mathbf{r}'(t)$ en el sistema S . Veremos un ejemplo en la sección de movimiento circular de este capítulo.

3.1. Derivada de un vector

Para un observador en S los vectores unitarios ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) permanecen constantes en el tiempo mientras que ($\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$) cambian. La situación inversa se da para un observador que se mueve con S' . Por tanto la derivada respecto del tiempo de un vector cualquiera $\mathbf{q}(t)$ en dos triédros en movimiento relativo S y S' es diferente,

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_S \neq \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_{S'}.$$

Si derivamos el vector $\mathbf{q}(t)$, cuya expresión en el sistema S' es $\mathbf{q}(t) = q_{x'}(t) \mathbf{i}' + q_{y'}(t) \mathbf{j}' + q_{z'}(t) \mathbf{k}'$, en el triédro S donde ($\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$) varían en el tiempo, tendremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_S &= \frac{dq_{x'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dq_{y'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dq_{z'}}{dt}\mathbf{k}' + \\ &+ q_{x'}\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S + q_{y'}\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S + q_{z'}\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Los primeros tres sumandos son iguales a $(d\mathbf{q}/dt)_{S'}$ que es la derivada temporal de $\mathbf{q}(t)$ manteniendo constantes los vectores $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Para calcular las derivadas que nos faltan respecto del tiempo de los vectores unitarios $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ en S podemos escribir,²

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S &= a_{11}\mathbf{i}' + a_{12}\mathbf{j}' + a_{13}\mathbf{k}' \\ \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S &= a_{21}\mathbf{i}' + a_{22}\mathbf{j}' + a_{23}\mathbf{k}' \\ \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S &= a_{31}\mathbf{i}' + a_{32}\mathbf{j}' + a_{33}\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde hemos de determinar los seis coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$. Puesto que $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ en todo instante de tiempo, si derivamos respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}') = 0 \implies \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = 0$$

y en consecuencia $a_{11} = 0$ y repitiendo el mismo argumento para \mathbf{j}' y \mathbf{k}' tendremos $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Además siempre se tiene $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ luego,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}') = 0 \implies \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

de modo que en las Ecs. 3.3 se verifica que $a_{13} = -a_{31}$, y siguiendo la misma argumentación para los productos escalares $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0$ y $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ se obtiene $a_{12} = -a_{21}$ y $a_{23} = -a_{32}$. Sólo quedan entonces en las Ecs. 3.3 tres cantidades independientes, a_{23}, a_{31} y a_{12} . Finalmente, si introducimos un vector $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{x'}\mathbf{i}' + \Omega_{y'}\mathbf{j}' + \Omega_{z'}\mathbf{k}'$ donde,

$$\Omega_{x'} = a_{23} \quad \Omega_{y'} = a_{31} \quad \Omega_{z'} = a_{12}$$

las ecuaciones 3.3 pueden escribirse de forma compacta,

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{i}' \quad \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{j}' \quad \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}'$$

y sustituyendo estas expresiones en la Ec. 3.2 llegamos finalmente a la relación general,

²Véase la sección 7.2, pag. 279 de la Ref. [2]

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{q} \quad (3.4)$$

El significado físico de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ es justamente el de la velocidad angular del triedro S' respecto de S .

Para la derivada $(d\mathbf{q}/dt)_{S'}$ del vector $\mathbf{q}(t) = q_x(t)\mathbf{i} + q_y(t)\mathbf{j} + q_z(t)\mathbf{k}$ obtendríamos una ecuación simétrica de 3.4,

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_{S'} = \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_S + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{q} \quad (3.5)$$

en donde evidentemente $\boldsymbol{\Omega}_{S'S} = -\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$.

De la ecuaciones 3.4 y 3.5 podemos extraer algunas consecuencias. Si particularizamos $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ en la Ec. 3.4 tendremos,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt}\right)_{S'} \quad (3.6)$$

Es decir, la *aceleración angular* es la misma en ambos triedros. Si consideramos tres sistemas coordenados S , S' y S'' aplicando reiteradamente la Ec. 3.4,

$$\boldsymbol{\Omega}_{S''S} = \boldsymbol{\Omega}_{S''S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$$

obtenemos una regla de adición de las velocidades angulares relativas.

3.2. Transformación de velocidades y aceleraciones

Como se deduce de la Fig. 3 siempre tendremos que $\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}_{o'}(t) + \mathbf{r}'_p(t)$. Calculando su derivada temporal

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_p}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt}\right)_S$$

y empleando 3.4 haciendo $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}'_p(t)$,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$$

en donde $\mathbf{v}_{o'}$ es la velocidad del origen O' del triedro S' respecto de S y $\mathbf{v}'_p = (d\mathbf{r}'_p/dt)_{S'}$ la velocidad de P respecto de S' y queda finalmente,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p \quad (3.7)$$

Esta última ecuación relaciona las velocidades en S y S' $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}'_p + \mathbf{v}_{arr}$ siendo el término $\mathbf{v}_{arr} = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$ denominado *velocidad de arrastre*.

Podemos repetir el mismo procedimiento para calcular $\mathbf{a}_p(t) = (d\mathbf{v}_p/dt)_S$. Empleando de nuevo la Eq. 3.4 con $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}'_p(t)$,

$$\mathbf{a}_p = \left(\frac{d\mathbf{v}_{o'}}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\mathbf{v}'_p}{dt} \right)_S + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o'} + \left[\left(\frac{d\mathbf{v}'_p}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p \right] + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt} \right)_S$$

y sustituyendo en el último sumando $(d\mathbf{r}'_p/dt)_S = (d\mathbf{r}'_p/dt)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$ queda finalmente,

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o'} + \mathbf{a}'_p + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \quad (3.8)$$

La aceleración $\mathbf{a}_{o'}$ es la aceleración del origen de S' respecto de S y \mathbf{a}'_p la del punto P en S' . Al término,

$$\mathbf{a}_{arr} = \mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)$$

se le denomina *aceleración de arrastre* y $\mathbf{a}_{cor} = 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p$ es la *aceleración de Coriolis* resultando entonces,

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p + \mathbf{a}_{cor} + \mathbf{a}_{arr}$$

Las ecuaciones 3.7 y 3.8 relacionan los vectores velocidad y aceleración de un punto P en dos triedros de referencia S y S' . Es decir, nos permiten calcular la velocidad y aceleración de P en S (\mathbf{v}_p y \mathbf{a}_p) si conocemos su velocidad y aceleración en un triedro S' (\mathbf{v}'_p y \mathbf{a}'_p) y el movimiento de S' con respecto de S . Éste último está determinado por la velocidad y aceleración del origen O' con respecto de S ($\mathbf{v}_{o'}$ y $\mathbf{a}_{o'}$) y la velocidad y aceleración angular del triedro S' con respecto de S ($\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ y $d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}/dt$).

3.3. Movimiento circular

A continuación recuperaremos las ecuaciones 2.8 y 2.9 para el movimiento de una partícula P que gira con radio R constante utilizando las transformación de velocidades y aceleraciones entre dos triedros coordenados (ecuaciones 3.7 y 3.8). El movimiento de P se analizará en los triedros S y S' de la figura 3.3. Ambos triedros tienen un origen común ($O \equiv O'$) de modo que $\mathbf{v}_{o'} = 0$ y también $\mathbf{a}_{o'} = 0$. El triedro S es fijo y la partícula se mueve en su plano XY , siendo θ el ángulo que forma el vector \mathbf{r}_p con el eje OX . El triedro S' , que tiene el eje OZ' siempre paralelo a OZ , gira de tal manera que la partícula esta siempre sobre el eje OX' . Por lo tanto la velocidad y aceleración angular de S' con respecto a S serán $\boldsymbol{\Omega}_{S'S} = \dot{\theta} \mathbf{k}'$ y $d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}/dt = \ddot{\theta} \mathbf{k}'$.

Un observador en S' ve a la partícula P en reposo ($\mathbf{v}'_p = 0$ y $\mathbf{a}'_p = 0$) en el punto del eje X' $\mathbf{r}'_p = R \mathbf{i}'$. Aplicando las ecuaciones 3.7 y 3.8 obtenemos la velocidad y aceleración en S ,

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p = R \dot{\theta} (\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}') = R \dot{\theta} \mathbf{j}' \quad (3.9)$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \wedge \mathbf{r}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) = R \ddot{\theta} (\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}') + R \dot{\theta}^2 (\mathbf{k}' \wedge [\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}']) = R \ddot{\theta} \mathbf{j}' - R \dot{\theta}^2 \mathbf{i}' \quad (3.10)$$

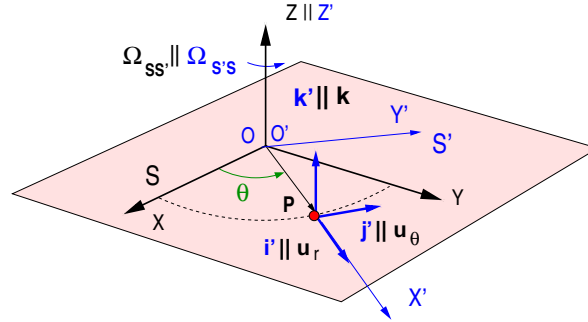


Figura 3.3: Movimiento circular de una partícula P en reposo en $\mathbf{r}'_p = R \mathbf{i}'$ respecto a S' , que a su vez gira respecto del triedro S .

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones 2.8 y 2.9, salvo que allí se utilizó la notación \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ en lugar de \mathbf{i}' y \mathbf{j}' . En particular, el término $-R \dot{\theta}^2 \mathbf{i}'$ es la aceleración centrípeta que es en todo momento paralela al vector normal \mathbf{n} que apunta hacia el centro de curvatura O .

Las ecuaciones 3.9 y 3.10 proporcionan la velocidad y aceleración del punto P con respecto de S proyectadas en el sistema S' . Si necesitáramos proyectarla en el sistema S simplemente deberíamos utilizar las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

en las ecuaciones 3.9 y 3.10.

La *cinemática* estudia el movimiento de los cuerpos sin preguntarse por las causas del mismo. Las observaciones nos indican que el movimiento de un cuerpo es el resultado de su interacción con otros cuerpos que le rodean y para describir dichas interacciones introducimos el concepto de *fuerza*. La *dinámica* es el estudio de la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas del mismo: las fuerzas.

4.1. Leyes de Newton

La dinámica clásica está fundamentada en las leyes del movimiento de Newton que pueden considerarse como *axiomas*, es decir, generalizaciones que no tienen demostración, fruto del análisis de los movimientos que observamos de los cuerpos y de la extrapolación de dichas observaciones. Su validez queda establecida en la medida en que los movimientos que predicen se corresponden con los que observamos en la Naturaleza.

La situación físicamente más simple corresponde a una *partícula aislada* que es aquella que no interacciona con el resto del universo. Se trata de una idealización, y podremos considerar que una partícula está aislada, bien cuando sus interacciones con las demás se cancelan, o bien porque decrecen con la distancia y se encuentra muy alejada de cualquier otra partícula con la que pudiera interaccionar.

- **1ª Ley de Newton** : Se postula la existencia de ciertos triedros, que denominaremos *inerciales*, respecto de los cuales las partículas aisladas tienen aceleración nula, por lo que su *cantidad de movimiento*, definida como el producto $\mathbf{p} = m_p \mathbf{v}_p$, es constante (*Ley de inercia*).

Respecto de un triedro inercial una partícula no sometida a ninguna fuerza se mueve con velocidad uniforme y rectilínea, su velocidad \mathbf{v}_p es un vector constante en el tiempo. Como se deduce de las Ecs. 3.7 y 3.8 si un triedro S es inercial, cualquier otro S' con $\mathbf{a}_{o'} = 0$, $\mathbf{\Omega}_{S'S} = 0$ y $d\mathbf{\Omega}_{S'S}/dt = 0$ también es inercial, resultando iguales las aceleraciones $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p$ que experimenta la partícula en ambos sistemas. Para las velocidades tendremos $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_p$.

- **2ª Ley de Newton** : Para una partícula *no* aislada se puede escribir en un triedro inercial $\mathbf{a}_p = \mathbf{F}/m_p$ donde el vector \mathbf{F} llamado *fuerza* depende de la interacción de la partícula con los objetos que se encuentran en su proximidad. El escalar $m_p > 0$ es la *masa inercial* de la partícula y tendremos,

$$\mathbf{F} = m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \quad (4.1)$$

Si utilizamos la Ec. 3.8 encontramos que si S y S' son dos triedros inerciales las aceleraciones –y por lo tanto la fuerza \mathbf{F} – que se observa en ambos triedros son las mismas. La segunda ley de Newton también se puede enunciar asimismo de la forma,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Es decir, que la fuerza produce la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento $\mathbf{p} = m_p \mathbf{v}_p$ de la partícula.

- **3ª Ley de Newton** : Respecto de un triedro inercial, para una pareja de partículas cualesquiera i y j aisladas del resto del universo se observa que,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

donde \mathbf{F}_{ij} (\mathbf{F}_{ji}) es la fuerza de la partícula j (i) sobre la i (j). Equivalentemente, usando la ecuación 4.1, tenemos $m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j = 0$ (*Ley de acción y reacción*).

Si el sistema formado por las dos partículas está aislado, la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la que ejerce la otra. Equivalentemente, podemos decir que la cantidad de movimiento $\mathbf{P} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j$ del sistema aislado formado por las dos partículas se conserva,

$$m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0.$$

4.2. Fuerzas

La segunda ley de Newton (Ec. 4.1) nos proporciona una *ecuación diferencial* cuya solución $\mathbf{r}_p(t)$ es la trayectoria de la partícula P . Para plantear dicha ecuación es preciso encontrar expresiones matemáticas para las interacciones entre las partículas, es decir, funciones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ para las fuerzas que dependen de la velocidad \mathbf{v} , la posición \mathbf{r} y el tiempo t . Conocidas éstas, la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ de la partícula se encuentra resolviendo las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.2)$$

Lo más común es dar condiciones iniciales $\mathbf{r}_p(t_o)$ y $\mathbf{v}_p(t_o)$ para la posición y la velocidad en algún instante inicial t_o .¹

¹Se desarrolla esta cuestión mediante un ejemplo en la página 104.

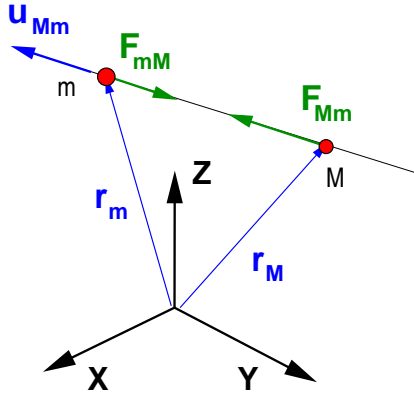
El estudio de las diferentes fuerzas que existen en el universo y la determinación de sus expresiones matemáticas es uno de los objetivos más importantes de la Física. Actualmente se conocen cuatro tipos de interacciones o fuerzas fundamentales: gravitatoria, electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte. En estos apuntes, sin embargo, haremos una clasificación de las fuerzas en sólo tres grupos: (i) las *interacciones* o acciones a distancia entre dos cuerpos donde intervienen la masa o la carga eléctrica (es decir, las dos primeras fuerzas de las cuatro enumeradas), (ii) las fuerzas *macroscópicas* o de *contacto*, como el rozamiento o las reacciones de apoyos, que microscópicamente son el resultado de las interacciones electromagnéticas entre el gran número de partículas (átomos) que componen los cuerpos materiales y (iii) las fuerzas de *inercia* que dependen del estado de movimiento del observador. Cabe señalar que las fuerzas de inercia no son fruto de ninguna interacción física sino de la aceleración del sistema no inercial con respecto al cual se estudia el movimiento. Por este motivo en ocasiones se las llama *pseudofuerzas*.

Además, los campos gravitatorio y electrostático son dos casos de *fuerzas centrales* puesto que su dirección pasa siempre por el punto fijo del espacio denominado *centro de fuerzas* donde se encuentra situada la masa o la carga que genera el campo.

4.2.1. Interacciones

4.2.1.1. Campo gravitatorio

Como se indica en la Fig. 4.1 entre dos masas puntuales m y M aparece una fuerza de atracción. La fuerza \mathbf{F}_{mM} que experimenta la partícula de masa m debida a su interacción gravitatoria con la de masa M viene dada por



$$\mathbf{F}_{mM} = -G \frac{mM}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^2} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|} \quad (4.3)$$

en donde el vector $(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)/|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|$ es un vector unitario con origen en M y extremo en m y G es la constante de gravitación universal que en el sistema MKS vale $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. En virtud de la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{Mm} = -\mathbf{F}_{mM}$.

La fuerza resultante sobre una partícula de masa m_β debida a un conjunto de masas m_α donde $\alpha = 1, \dots, N$ es la suma vectorial de la fuerza que ejerce cada una de ellas individualmente.

Figura 4.1: Interacción gravitatoria entre dos masas m y M .

$$\mathbf{F}_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N -G \frac{m_\beta m_\alpha}{|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|}$$

Se define el vector *intensidad* del campo gravitatorio $\mathbf{a}_M(\mathbf{r})$ creado por la masa M como la fuerza que ésta ejerce sobre la unidad de masa situada en el punto \mathbf{r} ,

$$\mathbf{a}_M(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}, \quad (4.4)$$

por lo que la fuerza sobre una masa m situada en el punto \mathbf{r} será, $\mathbf{F}_{mM} = m \mathbf{a}_M(\mathbf{r})$. Obsérvese que la intensidad del campo gravitatorio tiene dimensiones de aceleración. Para un sistema de $\alpha = 1, \dots, N$ partículas de masas M_α la intensidad de campo gravitatorio en el punto \mathbf{r} será la suma vectorial,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N (-G) \frac{M_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}$$

En la expresión de ley de gravitación aparecen las *masas gravitatorias* m y M que –en principio– no tienen por qué ser iguales a las *masas inerciales* correspondientes que aparecen en la segunda ley de Newton (Ec. 4.1). Sin embargo, ningún experimento realizado hasta la fecha ha encontrado discrepancia alguna entre ambos valores, por lo que no se distinguirá entre ambas en el resto del texto.

Para una masa m situada a una altura h sobre la superficie de la Tierra (de masa M_T y radio R_T) podemos hacer una aproximación escribiendo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T| = h + R_T$ y desarrollando el módulo de la fuerza en potencias de h/R_T ,

$$F_g = G \frac{m M_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|^2} = G \frac{m M_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}$$

$$F_g \simeq mg \left[1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T} \right)^2 - 4 \left(\frac{h}{R_T} \right)^3 + \dots \right]$$

en donde $g = GM_T/R_T^2 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. Tomando el versor \mathbf{k} normal a la superficie de la Tierra y apuntando en el sentido contrario al centro de la Tierra, podemos aproximar² la fuerza como

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{k} \quad (4.5)$$

siempre que $h/R_T \ll 1$.

4.2.1.2. Campo electromagnético

Entre dos cargas eléctricas q y Q aparecen fuerzas debido a la *interacción electromagnética*. En particular, si las cargas están en reposo, aparece la denominada *fuerza de Coulomb*, la cual se estudiará en profundidad en el curso de Física II. La fuerza de Coulomb \mathbf{F}_{qQ} que ejerce la carga Q sobre la q es atractiva ($Qq < 0$) o repulsiva ($Qq > 0$) dependiendo del signo de las cargas (ver la Fig. 4.1 reemplazando las masas M y m por las cargas correspondientes). Viene dada por,

$$\mathbf{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^2} \frac{(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q)}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|} \quad (4.6)$$

en donde $\epsilon_o > 0$ es una constante positiva y $1/4\pi\epsilon_o \simeq 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.

Tanto la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas (Ec. 4.3) como la fuerza de Coulomb entre cargas (Ec. 4.6) decrecen de manera inversamente proporcional al cuadrado

²Sobre los desarrollos en serie de potencias de una función puede consultarse la Pag. 106.

de la distancia. Sin embargo sus órdenes de magnitud son muy diferentes. Por ejemplo, para un protón y un electrón el cociente entre el módulo de ambas fuerzas es

$$\frac{F_{Coulomb}}{F_{Gravitatoria}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e m_p} \approx 10^{39} \quad (4.7)$$

Análogamente al vector intensidad del campo gravitatorio, se define el vector *campo eléctrico* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ originado por la carga Q como la fuerza que se ejerce sobre la carga unidad en el punto \mathbf{r} ,

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}, \quad (4.8)$$

de modo que la fuerza que experimenta la carga q situada en el punto \mathbf{r} será $\mathbf{F}_{qQ} = q \mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$. Para un conjunto de N cargas tendremos como para el campo gravitatorio una suma vectorial,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \frac{Q_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}$$

y la fuerza sobre la carga q_β situada en el punto \mathbf{r} será $\mathbf{F}_\beta(\mathbf{r}) = q_\beta \mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v}_q respecto de un imán experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}_q \wedge \mathbf{B}),$$

donde \mathbf{B} es el vector *inducción magnética* que mide la intensidad del campo magnético creado por el imán. Si hay un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} superpuestos la carga q experimenta una fuerza

$$\mathbf{F}_q = q[\mathbf{E} + \mathbf{v}_q \wedge \mathbf{B}],$$

que se denomina *fuerza de Lorentz*.

4.2.2. Fuerzas macroscópicas

4.2.2.1. Reacciones

Los cuerpos de nuestro entorno interactúan a través de las últimas capas de átomos que constituyen sus superficies exteriores. Cuando éstas se encuentran lo suficientemente próximas aparecen fuerzas macroscópicas que resultan del promedio de las interacciones a nivel molecular entre los átomos de sus superficies. Dichas fuerzas son de corto alcance, es decir, disminuyen rápidamente con la distancia de separación y se denominan *fuerzas de contacto* puesto que podemos considerar que sólo actúan sobre los cuerpos macroscópicos cuando sus superficies están en contacto físico.

4.2.2.2. Fuerza de rozamiento

La *fuerza de rozamiento* o *fricción por deslizamiento* es una fuerza de contacto que se opone al movimiento relativo de dos cuerpos macroscópicos. Su dirección se encuentra contenida en el plano tangente a las superficies en contacto y se verifica experimentalmente que su magnitud es $F_R = \mu N$ donde N es el módulo de la fuerza de reacción entre ambos cuerpos. Cumple las siguientes propiedades,

- No depende de la magnitud de la superficie de contacto, sino de la naturaleza de las superficies.
- Es proporcional a la reacción normal N entre ambos cuerpos.
- Al coeficiente de proporcionalidad μ se le denomina *coeficiente de rozamiento*

La dirección de la fuerza de rozamiento \mathbf{F}_R es contraria a la velocidad \mathbf{v} del cuerpo,

$$\mathbf{F}_R = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (4.9)$$

Se emplea el *coeficiente de rozamiento estático* $\mu = \mu_e$ cuando los dos cuerpos en contacto se encuentran en reposo relativo. En ausencia de otras fuerzas en la dirección del plano tangente a ambas superficies, \mathbf{F}_R es la fuerza mínima necesaria para ponerlas en movimiento relativo.³

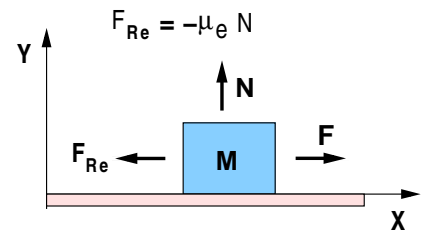


Figura 4.2: Fuerza de rozamiento estático.

Si los cuerpos se encuentran en movimiento relativo se utiliza el *coeficiente de rozamiento dinámico* o *cinético* $\mu = \mu_d$, cuyo valor en general es menor que el estático ($\mu_d < \mu_e$). Cuando la única fuerza que actúa en la dirección del movimiento es el rozamiento, \mathbf{F}_R representa la fuerza necesaria para mantener dichos cuerpos en movimiento uniforme relativo.

La fuerza de fricción entre un sólido y un gas o un líquido depende del tipo de flujo que exista alrededor del cuerpo.⁴ Si el flujo es laminar la fuerza de fricción \mathbf{F}_f es proporcional a su velocidad relativa al medio,

$$\mathbf{F}_f = -\gamma \mathbf{v} \quad (4.10)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad $\gamma > 0$ depende de la forma del cuerpo y del medio en que se mueve. Si el flujo es turbulento la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la velocidad.

4.2.3. Fuerzas en hilos y poleas

Poleas y cables ideales: Un hilo o cable ideal es aquel que consideramos inextensible y sin masa, cuya tensión T es siempre positiva de modo que si tiramos de uno de sus extremos la

³Puede consultarse la sección 7.9, pags 170-173 Vol I de la Ref. [1] y la sección 2.4 pags. 32-33 de [2].

⁴El alumno estudiará en mecánica de fluidos que el tipo de flujo depende del número de Reynolds, el cual está controlado por la viscosidad del fluido y la velocidad del cuerpo

fuerza ejercida se *transmite* a lo largo del mismo. La tercera ley de Newton nos dice que al tirar de un extremo ha de aparecer una fuerza de reacción en el extremo opuesto. Las tensiones pueden clasificarse como fuerzas de contacto y el hilo introduce en un problema una *ecuación de ligadura* adicional ya que relaciona los movimientos de los dos cuerpos que mantiene unidos.

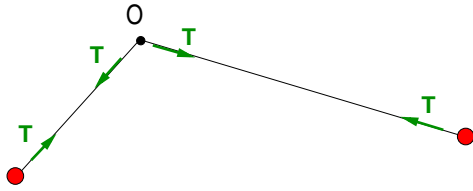


Figura 4.3: Dos masas m y M unidas por un hilo ideal al clavo O que se mueven sobre un plano horizontal.

en la Fig. 4.3, para las dos partículas de masas M y m unidas por un hilo ideal el momento cinético se conserva respecto del punto O (ver sección 4.5).

Además, los cables ideales relacionan el movimiento de los cuerpos a través de poleas. En una *polea ideal* no hay rozamiento entre ésta y el cable y tampoco se transmite cantidad de movimiento a la polea, que se considera sin masa, (o que ésta es despreciable). Las poleas ideales cambian la dirección del cable apoyado en ellas y por lo tanto la dirección de la tensión del cable sin alterar su valor.

Puesto que la tensión en un hilo ideal actúa en la dirección de la recta que une a los cuerpos, como vemos

4.2.3.1. Fuerza de un muelle

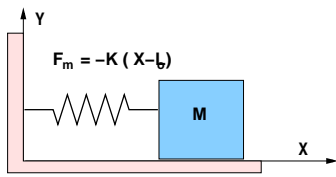


Figura 4.4: Fuerza de un muelle sobre un bloque de masa M .

Un muelle es un objeto mecánico elástico que, en su modelo más sencillo, está definido por su longitud natural L_o y su constante elástica K . Si el muelle obedece la *ley de Hooke*, la relación entre la fuerza en el extremo del muelle y su alargamiento viene dada por (ver figura 4.4)

$$\mathbf{F}_m = -K(L - L_o)\mathbf{i} \quad (4.11)$$

donde L es la longitud entre los extremos del muelle (que coincide con la coordenada x de la figura 4.4). A la cantidad $L - L_o$ se le llama *elongación*. Vemos que si $L > L_o$, es decir el muelle está estirado por encima de su longitud natural, la fuerza tiene sentido $-\mathbf{i}$ y el muelle trata de recuperar su longitud natural acercando el bloque hacia la pared. Si el muelle está comprimido, $L < L_o$, la fuerza tiene sentido según \mathbf{i} y el muelle intenta alejar al bloque de la pared.

Si se ignora el rozamiento, la ecuación 4.1 proyectada según la dirección \mathbf{i} para el bloque de masa M de la figura 4.4 es

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -K(x - L_o) \quad (4.12)$$

donde se ha utilizado la ley 4.11. La ecuación diferencial 4.12 es la de un oscilador armónico y será estudiada con detalle en el capítulo 8.

4.2.4. Fuerzas de inercia

En triedros inerciales el movimiento de una partícula está descrito por la ley 4.1, donde \mathbf{F} incluye a las fuerzas reales directamente aplicadas. Sin embargo, es muy habitual en problemas de ingeniería que sea necesario estudiar la dinámica con respecto a un sistema de referencia no

inercial. Como veremos a continuación, en este último caso es necesario añadir las conocidas como fuerzas de inercia.

Para una partícula P de masa m sobre la que actúa una fuerza \mathbf{F}_p la ecuación del movimiento con respecto a un sistema inercial S es

$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{a}_p \quad (4.13)$$

Sea ahora un sistema S' no inercial cuyo origen tiene velocidad $\mathbf{v}_{o'}(t)$ y aceleración $\mathbf{a}_{o'}(t)$ con respecto a S y cuyos ejes tienen velocidad y aceleración angular $\mathbf{\Omega}_{S'S}(t)$ y $\dot{\mathbf{\Omega}}_{S'S}(t)$, respectivamente. Utilizando la ecuación 3.8 en 4.13 resulta,

$$\mathbf{F}_p = m \left[\mathbf{a}'_p + \mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\mathbf{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \right] \quad (4.14)$$

Llamando fuerzas de inercia \mathbf{F}_I al término

$$\mathbf{F}_I = -m \left[\mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\mathbf{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \right] \quad (4.15)$$

la ecuación 4.14 es

$$m\mathbf{a}'_p = \mathbf{F}'_p, \quad \mathbf{F}'_p \equiv \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_I \quad (4.16)$$

la cual es la ecuación del movimiento en el sistema S' . Por lo tanto, si consideramos el movimiento respecto de un triedro de referencia S' *no inercial*, es necesario incluir en la segunda ley de Newton (Ec. 4.1) las fuerzas de inercia \mathbf{F}_I .

Las fuerzas de inercia dependen de la posición \mathbf{r}'_p y la velocidad \mathbf{v}'_p de la partícula en S' y del movimiento relativo entre ambos triedros. Al término $\mathbf{F}_{cor} = -2m(\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p)$ se le denomina *fuerza de Coriolis*. Esta fuerza de inercia es siempre perpendicular a la velocidad angular $\mathbf{\Omega}_{S'S}$ y al vector velocidad \mathbf{v}'_p de la partícula con respecto a S' .

La fuerza centrífuga $\mathbf{F}_c = -m[\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)]$ se dirige siempre en la dirección perpendicular al vector $\mathbf{\Omega}_{S'S}$. Si descomponemos la posición $\mathbf{r}'_p = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$ de la partícula en sus componentes perpendicular \mathbf{r}'_{\perp} y paralela \mathbf{r}'_{\parallel} a la velocidad angular $\mathbf{\Omega}_{S'S}$, puesto que $\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_{\parallel} = 0$, la fuerza centrífuga viene dada por,

$$\mathbf{F}_c = -m[\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_{\perp})] = m\Omega_{S'S}^2 r'_{\perp} \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} \quad (4.17)$$

Como se muestra en la Fig. 4.5, el vector unitario $\mathbf{r}'_{\perp}/r'_{\perp}$ apunta en la dirección perpendicular a $\mathbf{\Omega}_{S'S}$ con sentido hacia afuera del eje de giro.

El triedro terrestre

Para ilustrar las fuerzas de inercia discutiremos a continuación el conocido como *triedro terrestre*. Dado que la Tierra gira alrededor del Sol y alrededor de su eje de rotación con velocidades angulares $\Omega_{año}$ y $\Omega_{día}$ respectivamente, el triedro terrestre S_T con origen en el centro de la Tierra y ligado a la misma no es un sistema de referencia inercial. En consecuencia, para describir la dinámica de una partícula de masa m con respecto a S_T debemos de considerar además de las fuerzas directamente aplicadas los términos de inercia (ver ecuación 4.15).

El período de rotación de la Tierra alrededor de su eje es $T = (24\text{h} \times 60\text{m} \times 60\text{s}) = 86.400\text{ s}$ de modo que $\Omega_{\text{día}} = 2\pi/T \approx 7,3 \times 10^{-5}\text{ rad s}^{-1}$. Por otro lado, $\Omega_{\text{año}}$ se puede estimar como $\Omega_{\text{año}} = \Omega_{\text{día}}/(365 \times 24 \times 60 \times 60) \approx 2,0 \times 10^{-7}\text{ rad s}^{-1}$, por lo que $\Omega_{\text{día}} \gg \Omega_{\text{año}}$. Los términos que tenemos que tener en cuenta en la ecuación 4.15 son

$$-m \mathbf{a}_T, \quad -m \frac{d\Omega_{\text{día}}}{dt} \wedge \mathbf{r}'_p \quad -2m \Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{v}'_p, \quad \text{y} \quad -m \Omega_{\text{día}} \wedge (\Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{r}'_p). \quad (4.18)$$

donde \mathbf{a}_T es la aceleración del centro de la Tierra en su órbita en torno al Sol (el término \mathbf{a}_O en la ecuación 4.15). Si $D \equiv 1,5 \times 10^{11}\text{ m}$ es la distancia aproximada Tierra-Sol tendremos $|\mathbf{a}_T| \simeq \Omega_{\text{año}}^2 D = 6 \times 10^{-3}\text{ m s}^{-2}$.

Para analizar cómo de importante son los diferentes términos en la ecuación 4.18, consideraremos a continuación un objeto sobre la superficie terrestre ($|\mathbf{r}'_p| \approx R_T$) moviéndose a la velocidad del sonido $|\mathbf{v}'_p| \approx 340\text{ m/s}$ y calcularemos el cociente entre las fuerzas de inercia y su peso mg . Obviamente el término proporcional a $d\Omega_{\text{día}}/dt$ en la ecuación 4.18 será despreciable y para el resto tendremos

$$\frac{\Omega_{\text{año}}^2 D}{g} \simeq 6 \times 10^{-4}, \quad \frac{2\Omega_{\text{día}} v'_p}{g} \simeq 5 \times 10^{-3}, \quad \frac{\Omega_{\text{día}}^2 R_T}{g} \simeq 4 \times 10^{-3} \quad (4.19)$$

Vemos que incluso tomando un valor alto para la velocidad de la partícula, el término de Coriolis es muy pequeño comparado con la aceleración de la gravedad terrestre.

Podemos concluir que un triedro S' ligado a la superficie de la Tierra puede considerarse como inercial para la mayor parte de los movimientos de los objetos de nuestra vida diaria. Las correcciones debidas a las aceleraciones centrífuga o de Coriolis son relevantes si las distancias sobre la superficie terrestre son muy grandes o los periodos implicados son de movimientos muy lentos, de modo que sus efectos se acumulen a lo largo del tiempo, como es el caso del movimiento del *péndulo de Foucault*.

En la Fig. 4.6 consideramos dos triedros S y S' con origen en el centro de la Tierra. El sistema S es inercial y sus ejes apuntan a direcciones fijas en el espacio. El triedro S' es solidario con la Tierra y rota respecto de S con velocidad angular $\Omega_{\text{día}} = \Omega_{\text{día}} \mathbf{k}'$. La fuerza \mathbf{F}'_p que experimenta una partícula P situada a la altura h sobre la superficie terrestre será,

$$\mathbf{F}'_p = \mathbf{F}_g - m [2\Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{v}'_p + \Omega_{\text{día}} \wedge (\Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{r}'_p)]$$

y consideraremos por simplificar la velocidad $\mathbf{v}'_p = v'_p [\cos(\varphi) \mathbf{i}' + \sin(\varphi) \mathbf{k}']$ contenida en el plano (X', Z') . Asimismo, $\mathbf{r}'_p = (R_T + h) \mathbf{u}'_r = (R_T + h) [\cos(\theta) \mathbf{i}' + \sin(\theta) \mathbf{k}']$ y la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g = -mg \mathbf{u}'_r$ es la misma en S y S' . La fuerza centrífuga resulta,

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = -m (R_T + h) \Omega_{\text{día}} \wedge (\Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{u}'_r) = m (R_T + h) \Omega_{\text{día}}^2 \cos(\theta) \mathbf{i}'$$

como indica la figura y la de Coriolis,

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = -2m \Omega_{\text{día}} \wedge \mathbf{v}'_p = -2m \Omega_{\text{día}} v'_p \cos(\varphi) \mathbf{j}'$$

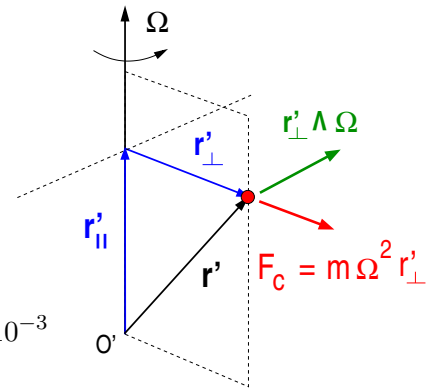
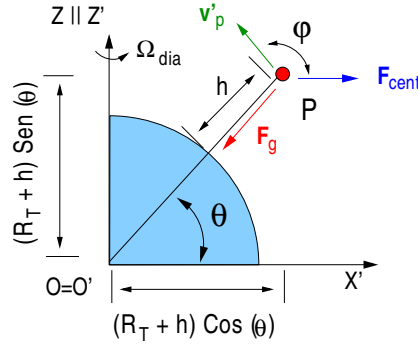


Figura 4.5: Fuerza centrífuga $\mathbf{F}_c = m \Omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}$ sobre una partícula.

Figura 4.6: El triángulo S' gira con la Tierra.

resulta ser perpendicular al plano (X', Z') dirigida hacia el lector por lo que no está dibujada en la Fig. 4.6. La fuerza total que se observa sobre P en S' es finalmente,

$$\mathbf{F}'_p = -mg \mathbf{u}'_r + m(R_T + h)\Omega_{dia}^2 \cos(\theta) \mathbf{i}' - 2m\Omega_{dia} v'_p \cos(\varphi) \mathbf{j}'$$

Vemos que además del peso \mathbf{F}_g hay otras componentes que dependen de los ángulos θ (latitud) y φ (longitud) que en algunos casos pueden ser nulas. La fuerza centrífuga es nula en los polos $\theta = \pm\pi/2$ y es máxima en el Ecuador ($\theta = 0$); la de Coriolis es nula si $\varphi = \pi/2$ y máxima cuando $\varphi = 0$.

4.3. Trabajo y energía

Se define el trabajo⁵ dW efectuado por la fuerza \mathbf{F} sobre la partícula P que se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ como el producto escalar,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \theta \quad (4.20)$$

El significado geométrico se aprecia en la Fig. 4.7, la cantidad dW representa la proyección $|\mathbf{F}| \cos(\theta)$ de la fuerza a lo largo del vector $d\mathbf{r}$. Es decir, solo la componente de la fuerza \mathbf{F} tangencial (paralela al vector $d\mathbf{r}$) realiza trabajo.

Entre dos puntos a y b cualesquiera de la trayectoria definidos por los vectores \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b tendremos,

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} dW = W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Donde aparece la *integral de línea*⁶ de la fuerza \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ entre los puntos considerados.

A partir de la 2ª ley de Newton es posible encontrar una ecuación que relaciona la energía cinética de la partícula

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.21)$$

⁵Puede consultarse el capítulo 8 del Vol I de la Ref. [1], pags. 201-233

⁶Una introducción de este concepto se encuentra en la pag. 111.

con el trabajo W realizado por la fuerza. Para deducirla multiplicamos la ecuación 4.1 escalarmente por la velocidad

$$\mathbf{v} \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.22)$$

en donde hemos utilizado la relación $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Integrando entre dos puntos a y b cualquiera de la trayectoria y usando la ecuación 4.21, encontramos

$$\Delta E_c = W_{ab} \quad (4.23)$$

con $\Delta E_c = m(v_b^2 - v_a^2)/2$. Por lo tanto, la variación ΔE_c de energía cinética de la partícula entre dos puntos a y b es igual al trabajo de la fuerzas aplicadas sobre ella W_{ab} .

Es importante resaltar que la ecuación 4.23 se ha obtenido integrando la 2ª ley de Newton y por tanto no añade información con respecto a ésta.

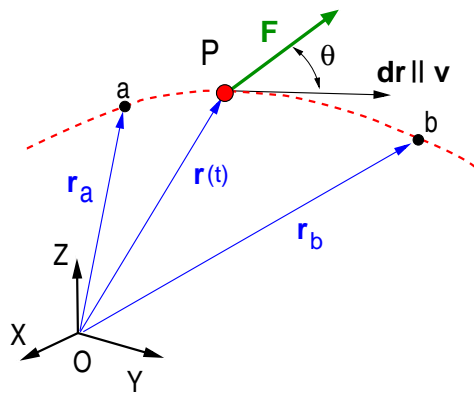


Figura 4.7: Solo la componente de la fuerza \mathbf{F} paralela a $d\mathbf{r}(t)$ realiza trabajo.

Si derivamos con respecto al tiempo la segunda forma de la ecuación 4.22 obtenemos la *potencia*,

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.24)$$

Vemos que cuando el producto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ es nulo, la energía cinética se conserva; sólo efectúa trabajo sobre la partícula la componente de la fuerza paralela al vector velocidad, es decir, a la tangente a la trayectoria de la partícula.

En las Ecs. 4.20, 4.23 y 4.24 no hemos especificado si el triedro respecto del que describimos el movimiento es inercial o no inercial. Si el triedro es *no inercial* hay que considerar además el trabajo de las fuerzas de inercia, en este caso tendremos,

$$\int_{r'_a}^{r'_b} dW' = W'_{ab} = \int_{r'_a}^{r'_b} \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r}'$$

donde hemos de substituir $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_I$. De la ecuación 4.23,

$$\Delta E'_c = \left[\frac{m\mathbf{v}'^2}{2} \right]_a^b = \frac{m\mathbf{v}'_b{}^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}'_a{}^2}{2} =$$

$$\int_{r'_a}^{r'_b} (\mathbf{F} + \mathbf{F}_I) \cdot d\mathbf{r}' = \int_{r'_a}^{r'_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \int_{r'_a}^{r'_b} \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{r}' = W_F + W_I \quad (4.25)$$

Entonces $\Delta E'_c = W_F + W_I$ donde el primer sumando corresponde al trabajo W_F de las fuerzas calculado igual que en la definición (Ec. 4.20) pero evaluado a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ respecto del triedro S' . El segundo es el *trabajo efectuado por las fuerzas de inercia* W_I y la suma de ambos es igual la variación de la energía cinética de la partícula en el triedro S' .

En el caso de la fuerza de Coriolis, es nulo el producto escalar de la fuerza \mathbf{F}_{cor} por la velocidad de la partícula \mathbf{v}' en el triedro S' ,

$$\mathbf{F}_{cor} \cdot \mathbf{v}' = -2m (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v}' = 0$$

No hace trabajo puesto que \mathbf{F}_{cor} es siempre perpendicular a la velocidad \mathbf{v}' .

Es importante resaltar que los trabajos que una fuerza \mathbf{F} realiza sobre una partícula en un sistema S y en otro S' en general no coinciden. Es decir,

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq W'_{ab} = \int_{r'_a}^{r'_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

Un ejemplo se encuentra en el problema resuelto del final del capítulo.

4.4. Fuerzas conservativas

Podemos aplicar la definición de trabajo 4.20 a lo largo de una trayectoria que forme una curva cerrada C en el espacio de modo que los puntos inicial a y final b son el mismo y escribimos

$$W_{ab} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Cuando a lo largo de *cualquier* curva cerrada C en el espacio se cumple que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

decimos que la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es *conservativa*. En este caso puede probarse que entonces existe una función escalar ⁷ $E_p(x, y, z)$ tal que $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y el trabajo vale

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b dE_p \Rightarrow W = -\Delta E_p = E_p(a) - E_p(b) \quad (4.26)$$

Es inmediato ver que cuando la función energía potencial existe, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, puesto que los puntos a y b de la fórmula precedente coinciden. La igualdad $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ puede desarrollarse así

$$dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

que implica

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p \equiv - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (4.27)$$

donde E_p es la *energía potencial* y el vector ∇E_p se denomina *gradiente* de la función $E_p(\mathbf{r})$ ⁸.

⁷Es aconsejable repasar los conceptos de *campo escalar* y *vectorial* que se introducen brevemente en la pág. 109.

⁸El concepto de derivada parcial y gradiente puede encontrarse en la Pag. 113.

En general, la energía potencial está definida salvo una constante aditiva de integración. Dicha constante no afecta a la dinámica ya que desaparece al derivar para calcular \mathbf{F} a partir de la ecuación 4.27 o bien al calcular la diferencia de energías potenciales entre dos puntos $\Delta E_p = E_p(\mathbf{r}_b) - E_p(\mathbf{r}_a)$. Como veremos a continuación para los campos eléctrico y gravitatorio dicha constante se suele elegir de modo que la energía sea nula en el límite $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, es decir, para puntos infinitamente alejados de la carga eléctrica (o masa) que crea dicho campo.

Cuando las fuerzas son conservativas la ecuación de la energía toma una forma muy sencilla ya que podemos utilizar las ecuaciones 4.26 y 4.23 y escribir

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \equiv E_c + E_p = cte \quad (4.28)$$

Por tanto, cuando las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas, la energía mecánica E (suma de la energía cinética y potencial) se conserva. Es decir, la energía mecánica toma el mismo valor a lo largo de la trayectoria.

El alumno puede comprobar que, cuando sobre una partícula actúan fuerzas conservativas y no conservativas, la ecuación de la energía se escribe como

$$\Delta(E_c + E_p) = W_{NC} \quad (4.29)$$

donde E_p es la energía potencial del que deriva la fuerza conservativa y W_{NC} es el trabajo que realizan las fuerzas no conservativas.

A continuación se calculan los potenciales del que derivan algunas de las fuerzas conservativas presentadas en la sección anterior y se llevan a cabo algunos ejemplos que ilustran los conceptos de energía y trabajo. El alumno encontrará un resumen de los resultados en la tabla 4.1 que hay al final de la sección.

4.4.1. Energía potencial elástica

En la figura 4.4 se muestra un bloque de masa M unido a un muelle de constante elástica K y longitud natural L_o . El trabajo de la fuerza elástica se calcula usando la definición 4.20 junto con la fuerza dada por la ecuación 4.11 y $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-K) \int_{x_a}^{x_b} (x - L_o) dx = - \left[\frac{K(x_b - L_o)^2}{2} - \frac{K(x_a - L_o)^2}{2} \right] \quad (4.30)$$

Usando el resultado anterior en la ecuación 4.26 encontramos la energía potencial elástica

$$E_e(x) = \frac{1}{2} K (x - L_o)^2 + cte. \quad (4.31)$$

en donde $cte.$ es una constante (suele tomarse $cte. = 0$ para que $E_e(L_o) = 0$). Se puede comprobar que la fuerza del muelle (ecuación 4.11) se recupera al sustituir la ecuación 4.31 en 4.27⁹

$$\mathbf{F}_m = -\nabla E_e = -\frac{dE_m}{dx} \mathbf{i} = -K(x - L_o) \mathbf{i} \quad (4.32)$$

⁹Aplicamos aquí la fórmula 9.11 de la sección *Complementos* en una dimensión.

Los resultados anteriores también pueden deducirse de la ecuación de movimiento (Ec. 4.12) para la masa m unida a un muelle ideal en una dimensión. En efecto,

$$m\ddot{x} = -K(x - L_o) \quad \Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} = -K(x - L_o)\dot{x}$$

Al integrar entre dos instantes de tiempo $t_a < t_b$ consecutivos,

$$\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2\right]_{t_a}^{t_b} = -\left[\frac{K}{2}(x - L_o)^2\right]_{t_a}^{t_b}$$

El término de la izquierda es justamente la variación de la energía cinética ΔE_c y el de la derecha es $-\Delta E_e$. Comprobamos una vez más que si las fuerzas son conservativas la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x - L_o)^2 \quad (4.33)$$

es constante.

Si se aplica una fuerza adicional F_x , la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + K(x - L_o) = F_x \quad \text{ahora,} \quad m\dot{x}\ddot{x} + K(x - L_o)\dot{x} = F_x\dot{x}$$

e integrando igual que antes resulta,

$$\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2\right]_{t_a}^{t_b} + \left[\frac{K}{2}(x - L_o)^2\right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} F_x dx = W_f$$

Vemos que recuperamos la ecuación 4.29. El término de la izquierda es la suma de ΔE_c y $\Delta E_m(x)$ y a la derecha aparece el *trabajo* W_f de la fuerza aplicada,

$$\Delta E = \Delta [E_c(\dot{x}) + E_m(x)] = W_f$$

La energía $E = E_c + E_m$ de la masa m puede disminuir si W_f es negativo (por ejemplo, cuando F_x es una fuerza de rozamiento o fricción) o aumentar cuando es positivo. El estudio detallado del movimiento oscilatorio con y sin rozamiento se efectuará en el capítulo 8.

4.4.2. Energía potencial gravitatoria

Sea una masa M en una posición fija \mathbf{r}_M y una segunda masa m que recorre una trayectoria entre los puntos \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b . El trabajo de la fuerza gravitatoria es

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}_{mM}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (-GMm) \int_{r_a}^{r_b} \frac{d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^2} = (GMm) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_M|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_M|} \right] \quad (4.34)$$

A la vista de la ecuación 4.26, podemos introducir la siguiente expresión para la energía potencial gravitatoria

$$E_g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} + cte. \quad (4.35)$$

Se toma $cte. = 0$ para que la energía potencial gravitatoria de un sistema constituido por dos masas infinitamente alejadas sea nula.

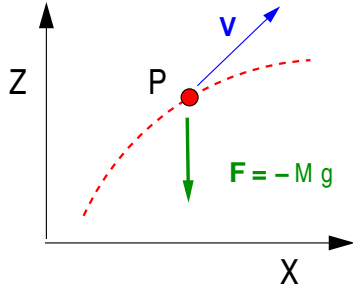
A partir de las ecuaciones 4.35 y 4.27 se recupera fuerza de gravitación (ecuación 4.3) ¹⁰ Puesto que el vector \mathbf{r}_M es fijo, si hacemos el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_M$ podemos calcular,

$$\mathbf{F}_{mM} = -\nabla E_g = -\frac{dE_g}{du} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{\mathbf{u}}{u} \frac{d}{du} \left(G \frac{Mm}{u} \right) = -G \frac{M}{u^2} \frac{\mathbf{u}}{u}$$

que es justamente la Ec. 4.3.

Como la fuerza que ejerce M sobre otra masa m situada en el punto \mathbf{r} es $\mathbf{F}_{Mm} = m \mathbf{f}_M(\mathbf{r})$, en ocasiones se utiliza en lugar de E_g el *potencial gravitatorio* del vector intensidad de campo gravitatorio U_g . Obviamente ambos potenciales están relacionados por $\Delta E_g = m \Delta U_g$ y el potencial gravitatorio es

$$U_g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) = -G \frac{M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} + cte. \quad (4.36)$$



Para el movimiento de una partícula sobre la superficie terrestre (ver ecuación 4.5), consideremos el triángulo de la Fig. 4.8. El trabajo del campo gravitatorio se calcula sustituyendo la ecuación 4.5 en 4.20

$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg \int_{z_a}^{z_b} dz = -mg(z_b - z_a) \quad (4.37)$$

y, teniendo en cuenta la ecuación 4.26, la energía potencial es

$$E_p(z) = mgz + cte. \quad (4.38)$$

Figura 4.8: Partícula P que se mueve en el plano vertical (Z, X) .

Ahora ya no estamos en un contexto astronómico sino en la Tierra, por lo que *cte.* suele escogerse para que la energía potencial gravitatoria sea nula en la superficie terrestre o en algún suelo del problema que se plantee. De nuevo, usando el potencial anterior en la ecuación 4.27 podemos comprobar que el cálculo es correcto

$$\mathbf{F}_g = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dz} \mathbf{k} = -mg \mathbf{k} \quad (4.39)$$

4.4.3. Potencial electrostático

Siguiendo un procedimiento análogo al empleado para el potencial gravitatorio podemos obtener la expresión del potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$. Tomando fija la posición de la carga Q en el punto \mathbf{r}_Q y empleando el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ de la Ec. 4.8,

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \int_{r_a}^{r_b} \frac{d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_Q|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_Q|} \right]$$

Obsérvese que, salvo el signo, esta energía potencial por unidad de carga tiene la misma forma que la energía potencial gravitatoria. Ambas son inversamente proporcionales a la distancia entre las partículas. Esto se ve con más claridad en la tabla que va al final de esta sección. El trabajo por unidad de carga también se puede escribir

¹⁰El gradiente en esféricas viene dado por la ecuación 9.12

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -[\phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a)],$$

donde se ha introducido el potencial eléctrico

$$\phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \quad (4.40)$$

creado por la carga Q en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$. Debe decrecer con la distancia y en el límite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| \rightarrow \infty$ resulta $\phi \rightarrow 0$. Como la fuerza entre dos cargas es $\mathbf{F}_{qQ} = q\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$, el trabajo efectuado por el campo eléctrico creado por Q cuando otra carga q se mueve entre los puntos \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b será,

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}_{qQ}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q[\phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a)] = -q\Delta\phi$$

y la variación de la energía potencial es $\Delta E_p = q\Delta\phi$. El campo eléctrico se recupera también como $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi$, puesto que el vector \mathbf{r}_Q es fijo, con el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$ podemos calcular el gradiente como anteriormente,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{du} \frac{\mathbf{u}}{u} = -\frac{\mathbf{u}}{u} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{u} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{u^2} \frac{\mathbf{u}}{u}$$

que es justamente la Ec. 4.8.

4.4.4. Energía potencial centrífuga

Cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es constante existe una energía potencial para la fuerza centrífuga. Recordemos que esta fuerza vale

$$\mathbf{F}_c = -m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')]$$

y el trabajo en el sistema S' es

$$dW' = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' = -m(\boldsymbol{\Omega} \wedge [\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}']) \cdot d\mathbf{r}' \quad (4.41)$$

Conviene introducir el vector $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'$ de modo que $d\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{r}'$. Por ser $\boldsymbol{\Omega}$ constante, podemos escribir la siguiente identidad

$$(\boldsymbol{\Omega} \wedge [\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}']) \cdot d\mathbf{r}' = (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r}' = (d\mathbf{r}' \wedge \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{u}$$

y sustituyendo en la ecuación 4.41

$$dW' = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' = -m(d\mathbf{r}' \wedge \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{u} = m(\boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u} = m\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}$$

e integrando de modo análogo a los ejemplos anteriores se obtiene finalmente la energía potencial centrífuga,

$$E_{ct} = -\frac{m}{2} |\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'|^2 = -\frac{m}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 r_{\perp}'^2 \quad (4.42)$$

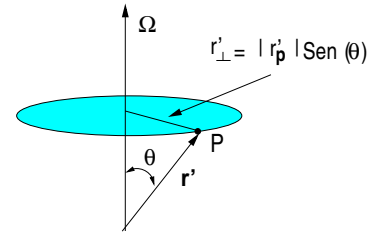


Figura 4.9: Proyección de \mathbf{r}'_p perpendicular a la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$

Obsérvese que, salvo el signo, esta energía potencial tiene la misma forma que la energía potencial de un muelle. Aquella era una constante multiplicada por la elongación del muelle al cuadrado, esta es una constante multiplicada por la distancia al eje al cuadrado. Como puede verse en la figura 4.9 la energía potencial centrífuga depende de la proyección $r'_{\perp} = |\mathbf{r}'_p| \sin \theta$ perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$ del vector \mathbf{r}'_p ; cuanto mayor es ésta, más intensa es la fuerza centrífuga \mathbf{F}_c y su energía centrífuga E_{ct} más negativa. El cálculo de la energía potencial puede comprobarse sustituyendo la ecuación 4.42 en 4.27:

$$\mathbf{F}_c = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dr'_{\perp}} \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} = \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} \frac{d}{dr'_{\perp}} \left(\frac{m}{2} \Omega^2 r'^2_{\perp} \right) = m \Omega^2 r'_{\perp} \left(\frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} \right). \quad (4.43)$$

| Tipo de fuerza | Expresión matemática | Energía potencial |
|---|---|--|
| Gravitatoria | $\mathbf{F}_{mM} = -G \frac{mM}{ \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M ^2} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)}{ \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M }$ | $E_{\text{gravitatoria}} = -G \frac{Mm}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_M }$ |
| Peso | $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}$ | $E_{\text{peso}} = mgz$ |
| Coulomb | $\mathbf{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{ \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q ^2} \frac{(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q)}{ \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q }$ | $E_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q }$ |
| Elástica | $\mathbf{F}_{\text{elástica}} = -K(x - L_o)\mathbf{i}$ | $E_e = \frac{1}{2}K(x - L_o)^2$ |
| Centrífuga ($\boldsymbol{\Omega}$ constante) | $\mathbf{F}_c = -m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')]$ | $E_{\text{centrífuga}} = -\frac{m}{2} \boldsymbol{\Omega} ^2 r'^2_{\perp}$ |

Cuadro 4.1: Algunos ejemplos de fuerzas conservativas y sus potenciales

4.5. Momento cinético

Respecto de un punto A se define el vector *momento cinético* o *momento angular* \mathbf{L}_A de una partícula P de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto de un triedro S como el producto vectorial,

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{p},$$

en donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el vector cantidad de movimiento. Como puede verse en la Fig. 4.10 el vector \mathbf{L}_A es perpendicular al plano formado por los vectores velocidad \mathbf{v} y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A$ siendo sus componentes,

$$L_{Ax} = y p_z - z p_y$$

$$L_{Ay} = z p_x - x p_z$$

$$L_{Az} = x p_y - y p_x.$$

Si el punto A no se mueve ($\mathbf{v}_A = 0$) respecto del triedro S y se deriva \mathbf{L}_A respecto al tiempo,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{p} + (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde el primer término es nulo. Al sustituir $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ se halla

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}. \quad (4.44)$$

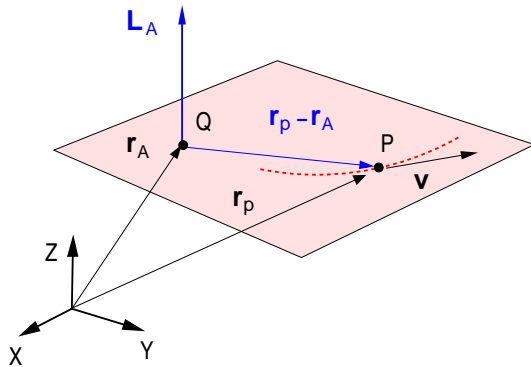


Figura 4.10: Momento cinético \mathbf{L}_A respecto del punto A en el triedro S .

Cuando los vectores \mathbf{F} y $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A)$ sean paralelos tendremos $d\mathbf{L}_A/dt = \mathbf{0}$ y el vector momento cinético es entonces una *magnitud conservada*, lo mismo que sucedía con la energía bajo ciertas condiciones (sec. 5.6). Al ser una magnitud vectorial en algunos casos no se conserva el vector \mathbf{L}_Q sino sólo alguna de sus componentes. Si escribimos $d\mathbf{L}_A/dt = \mathbf{M}_A$,

$$\mathbf{M}_A = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F} \quad (4.45)$$

al vector \mathbf{M}_A se le denomina *momento* de la fuerza \mathbf{F} respecto del punto A .

El momento cinético se conserva cuando la fuerza entre dos partículas se ejerce a lo largo de la recta que las une. Si en la Ec. 4.3 para la fuerza de gravedad tomamos el punto A en la posición de la masa M entonces los vectores \mathbf{F}_{Mm} y $\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ resultan ser paralelos y por la Ec. 4.44 tendremos $d\mathbf{L}_A/dt = \mathbf{0}$. Lo mismo sucede con el potencial eléctrico (Ec. 4.6) situando el punto A en cualquiera de las dos cargas q y Q .

4.6. Problema resuelto

Una abalorio de masa m desliza sin rozamiento por una guía recta contenida en el plano XY de un sistema inercial S con eje OZ según la vertical. La guía, que pasa por el origen O del triedro, rota a velocidad angular constante Ω alrededor del eje OZ . Se define un segundo sistema de referencia S' que gira con la guía (contenida en su plano $X'Z'$), tiene origen en O y su eje OZ' coincide con OZ . Si inicialmente el abalorio se encuentra a una distancia d_0 del eje OZ y tiene velocidad $d_0\Omega$ con respecto a la guía, se pide

1. Grados de libertad del problema e introducir la(s) coordenada(s) correspondientes para describir la trayectoria.
2. Fuerzas que actúan sobre el abalorio, decir si son conservativas y proyectarlas en el sistema S' .

En los sistemas S y S' :

1. Vectores de posición, velocidad y aceleración.
2. Plantear la 2ª ley de Newton, hallar la trayectoria del abalorio y las reacciones.
3. Ecuación de la energía.

Solución

1. El sistema tiene un único grado de libertad. Se toma como coordenada la distancia x' desde el eje de giro hasta la partícula.
2. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:
 - a) El peso $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}'$ (conservativa).
 - b) La reacción de la guía $\mathbf{N} = N_{y'}\mathbf{j}' + N_{z'}\mathbf{k}'$
 - c) Si se estudia la dinámica con respecto a S' hay que considerar las fuerzas de inercia $\mathbf{F}_I = -m[\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_p) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_p] = m\Omega^2 x'\mathbf{i}' - 2m\Omega \dot{x}'\mathbf{j}'$. La fuerza de Coriolis nunca trabaja y la fuerza centrífuga es conservativa por ser $\Omega = cte$.

En el sistema inercial S

1. Los vectores posición, velocidad y aceleración con respecto de S proyectados en S' son

$$\mathbf{r}_p = x'\mathbf{i}', \quad \mathbf{v}_p = \left(\frac{d\mathbf{r}_p}{dt}\right)_S = \dot{x}'\mathbf{i}' + x'\Omega\mathbf{j}', \quad \mathbf{a}_p = \left(\frac{d\mathbf{v}_p}{dt}\right)_S = (\ddot{x}' - x'\Omega^2)\mathbf{i}' + 2\dot{x}'\Omega\mathbf{j}' \quad (4.46)$$

2. Segunda ley de Newton en S proyectada en S'

$$0 = m(\ddot{x}' - x'\Omega^2) \quad (4.47)$$

$$N_{y'} = 2m\dot{x}'\Omega \quad (4.48)$$

$$N_{z'} - mg = 0 \quad (4.49)$$

La ecuación 4.47 puede integrarse una vez para dar

$$\dot{x}'^2 - x'^2\Omega^2 = cte \rightarrow \dot{x}'(t) = \Omega x'(t) \quad (4.50)$$

donde hemos utilizado que $\dot{x}' = d_0\Omega$ cuando $x' = d_0$ para determinar la constante. Integrando otra vez y usando $x' = d_0$ en $t = 0$ se obtiene $x'(t) = d_0 e^{\Omega t}$. Esta ley junto con la ecuación 4.48 proporcionan $N_{y'}(t)$. La ecuación 4.49 muestra que $N_{z'} = mg$.

Usando el vector de posición del apartado (1), $\mathbf{i}' = \cos\Omega t\mathbf{i} + \sin\Omega t\mathbf{j}$ y la ley $x'(t)$ encontrada anteriormente, la trayectoria de la partícula en S es

$$x(t) = d_0 e^{\Omega t} \cos\Omega t, \quad y(t) = d_0 e^{\Omega t} \sin\Omega t \quad z(t) = 0 \quad (4.51)$$

que son las ecuaciones de una espiral contenida en el plano XY .

3. El incremento de energía cinética y el trabajo de las fuerzas en el sistema S son:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + x'^2\Omega^2 - 2d_0^2\Omega^2) \quad (4.52)$$

$$W = \int (\mathbf{N} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{r}_p = \int N_{y'} \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{r}_p \quad (4.53)$$

Del apartado (1) sabemos que $d\mathbf{r}_p = (\dot{x}'\mathbf{i}' + x'\Omega\mathbf{j}') dt$ y, usando la ecuación 4.48 encontramos $N_{y'}\mathbf{j}' \cdot d\mathbf{r}_p = 2m\Omega^2 x' dx'$. El trabajo es

$$W = \int_{x'_0}^{x'} 2m\Omega^2 x' dx' = m\Omega^2 (x'^2 - d_0^2) \quad (4.54)$$

La ecuación de la energía $\Delta E_c = W$ queda finalmente $\dot{x}'^2 - \Omega^2 x'^2 = 0$, es decir, el mismo resultado que obtuvimos aplicando la 2ª ley de Newton (ver ecuación 4.50).

En el sistema no inercial S'

1. Los vectores posición, velocidad y aceleración son

$$\mathbf{r}'_p = x'\mathbf{i}', \quad \mathbf{v}'_p = \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt}\right)_{S'} = \dot{x}'\mathbf{i}', \quad \mathbf{a}'_p = \left(\frac{d\mathbf{v}'_p}{dt}\right)_{S'} = \ddot{x}'\mathbf{i}' \quad (4.55)$$

2. Segunda ley de Newton. Como S' es no inercial hay que incluir las fuerzas inercia $\mathbf{F}_I = m\Omega^2 x'\mathbf{i}' - 2m\Omega\dot{x}'\mathbf{j}'$

$$m\Omega^2 x' = m\ddot{x}' \quad (4.56)$$

$$N_{y'} - 2m\dot{x}'\Omega = 0 \quad (4.57)$$

$$N_{z'} - mg = 0 \quad (4.58)$$

A partir del sistema anterior se puede calcular la ley $x'(t)$ y las reacciones de la guía, obteniéndose los mismo resultados que en el apartado anterior. En el sistema S' la trayectoria de la partícula es un movimiento rectilíneo acelerado ya que tenemos

$$x'(t) = d_0 e^{\Omega t}, \quad y'(t) = 0 \quad z'(t) = 0 \quad (4.59)$$

3. El incremento de energía cinética y el trabajo de las fuerzas en el sistema S' son:

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 - d_0^2\Omega^2) \quad (4.60)$$

$$W' = \int (\mathbf{N} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_I) \cdot d\mathbf{r}'_p = \int \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}'_p \quad (4.61)$$

El peso, la reacción de la guía y la fuerza de Coriolis no realizan trabajo porque son perpendiculares al desplazamiento $d\mathbf{r}'_p = dx'\mathbf{i}'$. La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza centrífuga \mathbf{F}_c . Su trabajo puede calcularse con

$$W' = \int_{d_0}^{x'} m\Omega^2 x' dx' = \frac{1}{2}m\Omega^2 (x'^2 - d_0^2) \quad (4.62)$$

o bien teniendo en cuenta que la fuerza es conservativa y $W' = -\Delta E'_p$ con $E'_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2 x'^2$. La ecuación de la energía $\Delta E'_c = W'$ queda de nuevo $\dot{x}'^2 - \Omega^2 x'^2 = 0$.

Este ejemplo ha puesto de manifiesto dos conceptos importantes

1. La ecuación de la energía es consecuencia de la 2ª ley de Newton; no añade información adicional con respecto a ésta. Sin embargo, siempre que sea posible, es conveniente plantear esta ecuación; ver que la 2ª ley de Newton proporciona $\ddot{x}' - \Omega^2 x' = 0$ (en principio una ecuación diferencial difícil de integrar) mientras que la ecuación de la energía da directamente su integral $\dot{x}'^2 - \Omega^2 x'^2 = 0$.
2. El trabajo de una fuerza en dos sistemas de referencia distintos W y W' son en general diferentes. Por ejemplo la normal a la guía no trabaja en S' porque es normal al desplazamiento $d\mathbf{r}'_p$ (en S' la trayectoria es según la recta OX' , la cual es perpendicular a la reacción de la guía). Sin embargo, trabaja en S ya que hay una proyección de la reacción según $d\mathbf{r}_p$ (la reacción de la guía tiene una componente según la dirección de la tangente a la espiral que describe la partícula en S).

Como muestra la Fig. 5.1, un *sistema de partículas* es un conjunto de N masas diferentes m_α situadas en los puntos \mathbf{r}_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), que se mueven respecto de un triedro S (no necesariamente inercial). Sobre una partícula α actúa una fuerza \mathbf{F}_α que en general es suma de tres términos. En primer lugar, tenemos las conocidas como *fuerzas internas*, que son las fuerzas que las otras partículas ejercen sobre α . A la fuerza que una partícula β realiza sobre la partícula α la denotamos con $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$. Sobre la partícula α también puede actuar una *fuerza externa* al sistema $\mathbf{F}_{e\alpha}$ y, si además el triedro S no es inercial, tendremos que considerar la fuerza de inercia $\mathbf{F}_{I\alpha}$ correspondiente. Las ecuaciones del movimiento para cada una de las $\alpha = 1, \dots, N$ partículas serán,

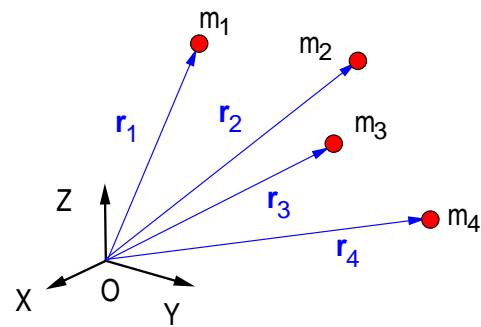


Figura 5.1: Sistema de partículas.

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_\alpha \equiv \mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha}^N \mathbf{F}_{\alpha\beta} \quad (5.1)$$

En el sumatorio de 5.1 se ha excluido el término $\beta = \alpha$ ya que la fuerza que una partícula ejerce sobre sí misma es nula ($\mathbf{F}_{\alpha\alpha} = 0$). Además tenemos que $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$.

Excepto en algunos casos con muy pocas partículas, la resolución simultánea de este conjunto de $3N$ ecuaciones diferenciales es un problema muy complicado. Cuando el número de partículas es muy grande, entonces se pueden aplicar técnicas estadísticas para hallar algunas cantidades. Esta es la idea de la Física Estadística. Aquí, sin utilizar estas herramientas, presentaremos algunos resultados sobre el sistema 5.1 que son muy generales y aplicables en multitud de situaciones.

5.1. Posición y velocidad del centro de masas

Se define el *centro de masas* (CM) del sistema de partículas como el punto del espacio cuyo vector de posición es

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \quad \text{donde,} \quad M = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \quad (5.2)$$

es la masa total del sistema. Como puede verse en la Fig. 5.2, la posición del centro de masas no tiene por qué coincidir necesariamente con la de una de las partículas del sistema. La *velocidad del centro de masas* se obtiene derivando este vector respecto del tiempo,

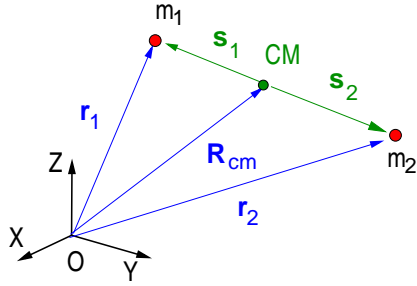


Figura 5.2: Posición del centro de masas (cm) de dos partículas.

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (5.3)$$

triedro S_{CM} que, por definición, no rota respecto de S .

Dado un triedro S cualquiera (o sea, no necesariamente inercial) podemos definir un segundo triedro S_{CM} que en todo instante tiene su origen en el centro de masas y ejes paralelos a S . Para cada partícula ¹ tendremos $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R}_{cm} + \mathbf{s}_{\alpha}$ en donde los vectores \mathbf{s}_{α} representan las posiciones de las partículas respecto de S_{CM} (ver figura 5.2). Derivando respecto del tiempo resulta $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_{\alpha}$ donde $\mathbf{w}_{\alpha} = d\mathbf{s}_{\alpha}/dt$ serán las velocidades de las partículas *respecto del*

Para algunas deducciones teóricas conviene reescribir la definición del centro de masas (5.2) multiplicando ambos miembros por la masa y luego derivar:

$$\begin{aligned} M\mathbf{R}_{cm} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\mathbf{R}_{cm} + \mathbf{s}_{\alpha}) = M\mathbf{R}_{cm} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha}, \\ M\dot{\mathbf{R}}_{cm} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\dot{\mathbf{R}}_{cm} + \dot{\mathbf{s}}_{\alpha}) = M\dot{\mathbf{R}}_{cm} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\mathbf{s}}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al comparar los primeros y últimos términos se deducen las igualdades

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\mathbf{s}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

¹En la Fig. 5.2 se han representado solamente dos partículas pero el mismo esquema es aplicable a las $\alpha = 1, 2, \dots, N$ partículas del sistema de la Fig. 5.1.

5.2. Movimiento del centro de masas

La ecuación de movimiento para el CM del sistema se obtiene sumando las $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ecuaciones vectoriales 5.1,

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta}$$

Puesto que $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ y $\mathbf{F}_{\alpha\alpha} = 0$ el doble sumatorio en la última ecuación es nulo. Es decir, *la resultante de las fuerzas internas del sistema de partículas es nula*,

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.6)$$

En consecuencia,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{cm}}{dt} = \mathbf{F}_T \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}), \quad (5.7)$$

que nos indica que el centro de masas se mueve como si fuese a su vez una partícula donde se concentra toda la masa M del sistema sobre la que se encuentra aplicada la resultante \mathbf{F}_T de todas las fuerzas externas y de inercia respecto del triedro S .

La suma total de todas las fuerzas de inercia que aparece en la ecuación 5.7 en caso de que el sistema S sea no inercial,

$$\mathbf{F}_I = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{I\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left[\mathbf{a}_o + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}_{\alpha} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{\alpha}) \right]$$

puede escribirse en función de \mathbf{R}_{cm} y \mathbf{V}_{cm} sin más que utilizar las definiciones 5.2 y 5.3. Se obtiene

$$\mathbf{F}_I = -M \left[\mathbf{a}_o + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{R}_{cm} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}_{cm}) \right] \quad (5.8)$$

siendo $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de S respecto de otro triedro inercial.

Conservación de la cantidad de movimiento

Si la resultante de todas las fuerzas exteriores y de inercia aplicadas sobre un sistema de partículas es nula, entonces la cantidad de movimiento del centro de masas y la cantidad de movimiento del sistema se conservan.

Este resultado es consecuencia de la ecuación 5.7 ya que si $\mathbf{F}_T = \mathbf{0}$ tenemos

$$\frac{d}{dt} (M\mathbf{V}_{cm}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{cm} \equiv M\mathbf{V}_{cm} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \text{cte.} \quad (5.9)$$

En la penúltima igualdad se ha empleado 5.4.

Conservación de la energía para el centro de masas

Dado que la ecuación 5.7 tiene la misma forma que la del movimiento de una partícula de masa M sometida a la fuerza \mathbf{F}_T , podemos encontrar una ecuación de conservación de la energía siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo anterior (ver ecuación 4.25)

Se llama "estado" de un sistema de partículas a las posiciones y velocidades de las mismas. Multiplicando escalarmente por \mathbf{V}_{cm} la ecuación 5.7 e integrando entre dos estados denotados por los subíndices a y b tenemos

$$\int_{V_{cma}}^{V_{cmb}} d\left(\frac{M}{2}V_{cm}^2\right) = \int_{\mathbf{R}_{cma}}^{\mathbf{R}_{cmb}} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm}$$

Vemos que el término de la derecha representa el incremento de energía cinética del centro de masas entre los estados a y b y el derecho es el trabajo de la fuerza \mathbf{F}_T :

$$\left[\frac{M}{2}V_{cm}^2\right]_{V_{cma}}^{V_{cmb}} = W_{cm}, \quad \text{con} \quad W_{cm} \equiv \int_{\mathbf{R}_{cma}}^{\mathbf{R}_{cmb}} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm} \quad (5.10)$$

Hay tres aspectos importantes de la ecuación 5.10 que deben señalarse

1. El término $MV_{cm}^2/2$ es la energía cinética del centro de masas y no debe confundirse con la energía cinética del sistema de partículas (ver siguiente sección).
2. Las fuerzas interiores no modifican la energía cinética del centro de masas.
3. El trabajo W_{cm} está calculado a lo largo de la trayectoria del centro de masas $\mathbf{R}_{cm}(t)$

5.3. Energía de un sistema de partículas

Veamos a continuación cómo se escribe la ecuación de la energía en un sistema S cualquiera y en el sistema S_{CM} con origen en el centro de masas y ejes siempre paralelos a los de S .

Ecuación de la energía en S

La energía cinética de un sistema de partículas con velocidades \mathbf{v}_α respecto de un sistema S es

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}. \quad (5.11)$$

Dicha energía puede escribirse en función de la energía cinética del centro de masas. Sustituyendo la relación $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_\alpha$ en 5.11 encontramos

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_\alpha) \cdot (\mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_\alpha) = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} w_\alpha^2 + \mathbf{V}_{cm} \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{w}_\alpha \quad (5.12)$$

y, como muestra la ecuación 5.5, el último término de la derecha es nulo. Por lo tanto la energía cinética del sistema de partículas en S

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} \quad (5.13)$$

es igual a la suma de la energía cinética del centro de masas más la energía cinética de las partículas con respecto al triedro S_{CM} .

La ecuación de la energía del sistema de partículas en S se obtiene multiplicando escalarmente cada una de las N ecuaciones 5.1 por \mathbf{v}_α y sumando. El resultado integrado entre dos estados del sistema a y b es

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha}^N \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_\alpha \quad (5.14)$$

Si en el último término de la derecha empleamos la relación $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ encontramos finalmente

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \int_a^b \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \quad (5.15)$$

Por lo tanto, el incremento de energía cinética del sistema de partículas en S es igual al trabajo de las fuerzas exteriores y de inercia (si S no es inercial) más el trabajo de las fuerzas interiores.

Es interesante hacer las siguientes observaciones sobre los trabajos que aparecen en la ecuación 5.15

1. Usando la relación $d\mathbf{r}_\alpha = d\mathbf{R}_{cm} + d\mathbf{s}_\alpha$, el trabajo de las fuerzas exteriores y de inercia se escribe como

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha = \int_a^b \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm} + \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha \quad (5.16)$$

Vemos que dicho trabajo es suma del trabajo de la resultante exterior y de inercia a lo largo de la trayectoria \mathbf{R}_{cm} (W_{cm}) más el trabajo de las fuerzas exteriores y de inercia en el sistema S_{CM} .

2. Aunque la resultante de las fuerzas internas es nula ($\sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0$), su trabajo en general

es no nulo. Vemos que depende de la distancia relativa entre partículas $d(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)$ y, dado que $d(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) = d(\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta)$, el trabajo de las fuerzas internas en el sistema S y en S_{CM} serán iguales.

3. Existen casos particulares en los que el trabajo de las fuerzas internas es nulo. Dos ejemplos importantes son:

a) *Poleas y cables*: El trabajo de las fuerzas interiores de un sistema como el de la Fig. 4.3 será nulo porque al existir la ligadura del cable ideal (de longitud constante) tendremos $d[\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta] = 0$

b) *Sólido rígido*: En un sólido rígido ideal (indeformable) las distancias relativas entre sus partículas $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ son constantes y por lo tanto $W_{int} = 0$.

4. Si las fuerzas internas son conservativas, $dU_{int}(|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta|) = -\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d(\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta)$, podemos escribir

$$W_{int} = \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \int_a^b \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \cdot d[\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta] = -\Delta U_{int}$$

Ecuación de la energía en S_{CM}

Sean $\mathbf{F}'_{I\alpha}$ la fuerza de inercia sobre la partícula α en el triedro S_{CM} . Las ecuaciones del movimiento para las N partículas en el sistema S_{CM} son

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{w}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}'_{I\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta}^N \mathbf{F}_{\alpha\beta}, \quad (5.17)$$

la cual es idéntica a la ecuación 5.1 salvo que aparecen \mathbf{w}_α y $\mathbf{F}'_{I\alpha}$ en lugar de \mathbf{v}_α y $\mathbf{F}_{I\alpha}$. Aunque los ejes de S_{CM} no giran con respecto a S , su origen (el centro de masas) puede tener aceleración con respecto a S y por lo tanto la fuerza de inercia sobre una partícula α en S_{CM} es en general diferente que en S ($\mathbf{F}'_{I\alpha} \neq \mathbf{F}_{I\alpha}$).

Para deducir la ecuación de la energía en S_{CM} multiplicamos escalarmente cada una de las N ecuaciones 5.17 por \mathbf{w}_α y sumamos para todas las partículas. Integrando entre dos estados a y b del sistemas encontramos

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha w_\alpha^2 \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}'_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha + \int_a^b \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d(\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta). \quad (5.18)$$

Por otro lado, si a la ecuación 5.15 le restamos la ecuación 5.10 encontramos el siguiente resultado

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha w_\alpha^2 \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha + \int_a^b \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \quad (5.19)$$

donde hemos usado las ecuaciones 5.13 y 5.16. Comparando ahora las ecuaciones 5.18 y 5.19 y teniendo en cuenta que el trabajo de las fuerzas interiores en los sistema S y S_{CM} son iguales, encontramos el siguiente resultado

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}'_{I\alpha} \cdot d\mathbf{s}_\alpha = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{I\alpha} \cdot d\mathbf{s}_\alpha, \quad (5.20)$$

es decir, la suma de los trabajos en S_{CM} de las fuerzas de inercia $\mathbf{F}'_{I\alpha}$ y $\mathbf{F}_{I\alpha}$ son iguales.

5.4. Momento cinético de un sistema de partículas

El momento cinético (también llamado “momento angular”) \mathbf{L}_A de un sistema de partículas respecto de un punto A es la suma vectorial de los momentos cinéticos $\mathbf{L}_{A\alpha}$ de cada una de las partículas del sistema respecto de dicho punto,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{L}_{A\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (5.21)$$

Si se está interesado en calcular el momento cinético del sistema con respecto a su centro de masas, se cambia el subíndice A por cm en la ecuación anterior y tenemos

$$\mathbf{L}_{CM} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_{cm}) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (5.22)$$

Hemos empleado el subíndice $_{cm}$ como abreviatura de “del centro de masa”. Por ejemplo \mathbf{R}_{cm} significa “posición del centro de masa”. En cambio empleamos el subíndice $_{CM}$ como abreviatura de “con respecto al centro de masa”. Por ejemplo \mathbf{L}_{CM} significa “momento cinético con respecto al centro de masa”. Para el sistema de referencia con origen en el centro de masa también utilizamos los subíndices en mayúsculas.

Si ahora empleamos las relaciones $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_{cm} + \mathbf{s}_\alpha$ y $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_\alpha$ en la ecuación 5.22 encontramos el siguiente resultado

$$\mathbf{L}_{CM} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha (\mathbf{V}_{cm} + \mathbf{w}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{V}_{cm} \wedge \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{s}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \quad (5.23)$$

donde una vez más hemos utilizado la ecuación 5.5. Hemos hallado que el momento cinético del sistema con respecto al centro de masas es el mismo en el sistema S (dado por la ecuación 5.22) que en el sistema S_{CM} (último término de la derecha en la ecuación 5.23).

En muchas ocasiones es práctico disponer de una ecuación que relacione los momentos cinéticos del sistema respecto a un punto cualquiera y al centro de masas. Dicha relación se obtiene fácilmente sin más que restar la ecuación 5.23 de la ecuación 5.21 y usar las relaciones 5.5:

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_{CM} + (\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{r}_A) \wedge M \mathbf{V}_{cm}, \quad (5.24)$$

es decir, el momento cinético del sistema respecto de un punto A es suma del momento cinético del sistema de respecto del CM y el momento cinético del CM respecto de A .

Para calcular como varía con el tiempo el momento cinético del sistema respecto a un punto A se toma la derivada temporal en la ecuación 5.21

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_A) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \quad (5.25)$$

$$= -\mathbf{v}_A \wedge M \mathbf{V}_{cm} + \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt}, \quad (5.26)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{v}_\alpha \wedge \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{0}$. El primer término se anula si A es un punto fijo ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) o si es el centro de masas ($A = CM \Rightarrow -\mathbf{v}_A \wedge M \mathbf{V}_{cm} = -M \mathbf{v}_{cm} \wedge \mathbf{V}_{cm} = \mathbf{0}$) resulta

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \quad (5.27)$$

y, sustituyendo la Ec. 5.1, llegamos a

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta}.$$

En los casos más habituales² las fuerzas internas son paralelas a $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ y no contribuyen a

²Por ejemplo las fuerzas gravitatorias y electrostáticas.

$d\mathbf{L}_A/dt$ puesto que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} &= \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} + (\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\beta\alpha} \\ &= \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Entonces tendremos finalmente

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha} \quad \text{siendo,} \quad \mathbf{M}_{\alpha} \equiv (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}). \quad (5.28)$$

Luego la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto a un punto A (que es el centro de masas o tiene velocidad nula) es igual a la suma de los momentos \mathbf{M}_{α} de las fuerzas aplicadas al sistema respecto del punto. Cuando las fuerzas internas actúan a lo largo de los vectores $\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}$ entonces dichos momentos \mathbf{M}_{α} son los de las fuerzas externas y de inercia $\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}$, y no contribuyen a $d\mathbf{L}_A/dt$ las fuerzas internas $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$.

Conservación del momento cinético

Si la suma de todos los momentos respecto al centro de masas o respecto a un punto inmóvil de las fuerzas exteriores y de inercia aplicadas a un sistema de partículas es nula, el momento cinético respecto a dicho punto se conserva.

Este resultado es consecuencia de la ecuación 5.28, ya que si $\sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha} = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{0}$ tenemos

$$\sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_A \text{ es cte.} \quad (5.29)$$

Ejemplo: Si las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas son solo “fuerzas centrales”, esto es, tales que sus rectas de acción forman un haz que pasa por un punto (el “centro de fuerzas”) entonces sus momentos con respecto a dicho punto son nulos y el momento cinético con respecto a dicho centro se conserva. Este es el caso de los planetas del sistema solar, sobre los que actúan fuerzas cuyas rectas de acción pasan en todo momento por el Sol. Actúan además fuerzas gravitatorias internas (esto es, entre los propios planetas, además de la fuerza gravitatoria solar), pero éstas, como vimos, no pueden alterar el momento cinético.

5.5. Aplicaciones

5.5.1. Sistema de dos partículas

El sistema de partículas más simple posible es el de la Fig. 5.3 formado solamente por dos partículas de masas m_1 y m_2 ³. Si introducimos las posiciones respecto del CM del sistema,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{R}_{CM} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{R}_{CM} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$$

³Puede consultarse la Sec. 7.2, pags. 222-225 de la Ref. [4], Sec. 4.7, pags. 184-188 de la Ref. [2] y el Ejemplo 9.5, pags. 252-255 de la Ref. [1].

Si en la Ec. 5.2 para el vector \mathbf{R}_{CM} de dos partículas sumamos y restamos $m_2 \mathbf{r}_1$ se tiene,

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R}_{CM} + m_2 \mathbf{r}_1 = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_2 \mathbf{r}_1$$

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R}_{CM} + m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_1$$

luego,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

y puesto que, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} + \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right] (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = \mathbf{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

Finalmente,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

Introducimos el vector,

$$\mathbf{q} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (5.30)$$

cuyo módulo es la distancia relativa entre las dos partículas y la denominada *masa reducida* del sistema,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Las ecuaciones quedan entonces expresadas en función del vector \mathbf{q} y su derivada respecto del tiempo que es la velocidad \mathbf{v}_q ,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{q} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{q} \quad (5.31)$$

y derivando respecto del tiempo con $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{s}}_1 - \dot{\mathbf{s}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ obtenemos las velocidades,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}_q \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}_q \quad (5.32)$$

La energía cinética de este sistema de dos partículas es,

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

donde substituyendo las velocidades 5.32,

$$E_c = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{v}_q^2$$

Operando resulta finalmente una ecuación equivalente a la Ec. 5.13,

$$E_c = \frac{M}{2} \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 \quad (5.33)$$

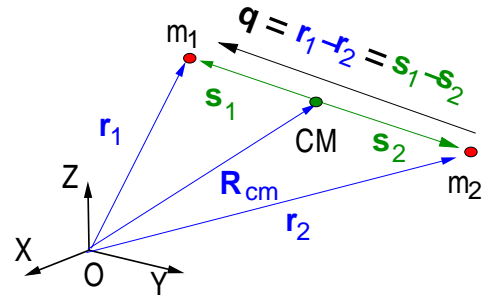


Figura 5.3: Sistema de dos partículas.

la energía cinética se descompone en dos términos, la del centro de masas y otra proporcional a la masa reducida.

Un resultado análogo se obtiene si calculamos el momento cinético respecto de un punto O fijo,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_o &= \mathbf{r}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{L}_o &= (\mathbf{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{q}) \wedge (m_1 \mathbf{V}_{CM} + \mu \mathbf{v}_q) + (\mathbf{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{q}) \wedge (m_2 \mathbf{V}_{CM} - \mu \mathbf{v}_q) \end{aligned}$$

de donde operando se obtiene,

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{R}_{CM} \wedge M \mathbf{V}_{CM} + \left(\frac{\mu^2}{m_1} + \frac{\mu^2}{m_2} \right) (\mathbf{q} \wedge \mathbf{v}_q)$$

Llegamos finalmente a una descomposición del momento cinético análoga a la que obtuvimos para la energía cinética que equivale a la Ec. 5.24,

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{CM} \wedge M \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{q} \wedge \mu \mathbf{v}_q \quad (5.34)$$

Las ecuaciones 5.33 y 5.34 nos proporcionan la energía cinética y el momento cinético del sistema de la Fig. 5.2. En el caso mas general sobre este sistema de dos partículas actúan unas fuerzas interiores $\mathbf{F}_{12}^i = -\mathbf{F}_{21}^i$ y fuerzas exteriores \mathbf{F}_1^e y \mathbf{F}_2^e . Las ecuaciones de movimiento son,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_{21}^i \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2^e + \mathbf{F}_{12}^i \quad (5.35)$$

Sumando las Ecs. 5.35, siendo $\mathbf{F}_1^e = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{I1}$ y $\mathbf{F}_2^e = \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{I2}$ encontramos,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = (\mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{I1} + \mathbf{F}_{21}^i) + (\mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{I2} + \mathbf{F}_{12}^i)$$

y con $M = m_1 + m_2$ obtenemos la Ec. 5.7 de movimiento para el centro de masas,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e$$

en donde sólo intervienen las fuerzas externas.

5.5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales

Un caso de particular interés es el del movimiento de dos partículas de masas m_1 y m_2 que interaccionan entre sí mediante fuerzas que dependen de su distancia relativa,

$$\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

y que actúa a lo largo de la recta que une las masas m_1 y m_2 . A este tipo de fuerzas pertenece el campo gravitatorio (Ec. 4.3) o electrostático (Ec. 4.6). Si empleamos el vector $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (Ec. 5.30),

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = F(q) \frac{\mathbf{q}}{q}$$

y podemos utilizar los resultados de la sección anterior. Si consideramos que la masa m_1 permanece inmóvil en el punto \mathbf{r}_1 el movimiento de los dos cuerpos se reduce al de una partícula en un campo exterior donde la energía potencial $U(q)$ depende sólo de la distancia $|q|$ al punto \mathbf{r}_1 ,

$$\mathbf{F}(q) = -\nabla U(q) \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(q) = -\frac{dU}{dq} \frac{\mathbf{q}}{q}$$

aplicando la Ec. 9.12. Se dice que es una *fuerza central* puesto que su dirección pasa siempre por el punto fijo \mathbf{r}_1 del espacio denominado *centro de fuerzas*. Consideraremos además que el sistema de dos partículas se encuentra *aislado*, es decir, que no existen fuerzas externas de modo que el CM del sistema es un triedro inercial.

Como se deduce de la Ec. 5.7 la cantidad de movimiento de este sistema de dos partículas es constante,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_{CM}$$

y sus velocidades \mathbf{p}'_1 y \mathbf{p}'_2 respecto de un referencial S_{CM} que se mueva con el CM del sistema satisfacen $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$. Empleando las Ecs. 5.31 y 5.32 con $\mathbf{V}_{CM} = 0$,

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{v}_q = \mu \mathbf{v}_q$$

en donde μ es la masa reducida, $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{v}_q = d\mathbf{q}/dt$. Restando las Ecs. de movimiento 5.35,

$$\frac{d\mathbf{v}_q}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(q) \frac{\mathbf{q}}{q} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} F(q) \frac{\mathbf{q}}{q}$$

obtenemos una ecuación de movimiento simplificada,

$$\mu \frac{d\mathbf{v}_q}{dt} = F(q) \frac{\mathbf{q}}{q} \quad (5.36)$$

que corresponde a la de una partícula de masa μ que se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(q)$, respecto del sistema de CM. Junto con las Ecs. 5.33 y 5.34,

$$E_c = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{q} \wedge \mu \mathbf{v}_q$$

se simplifica el problema del movimiento de dos cuerpos, resultando las distancias $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y las velocidades relativas $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ las cantidades relevantes.

Empleando la Ec. 5.28 podemos comprobar que se conserva el momento cinético, $\mathbf{L}_{CM} = \text{cte}$. puesto que $\mathbf{F}(q)$ es paralelo a \mathbf{q} . En consecuencia, el movimiento de las dos partículas se encuentra confinado en un plano perpendicular a \mathbf{L}_{CM} en el que están contenidos los vectores $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y \mathbf{v}_q . En el caso de que la fuerza central \mathbf{F} sea además *conservativa* se tendrá $\mathbf{F} = -\nabla U$ y también se conservará la energía del sistema ⁴.

Al encontrarse el movimiento contenido en un plano, (que podemos identificar con el (x, y)) descomponemos la velocidad $\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$ en sus componentes radial \mathbf{v}_r paralela al vector $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y angular \mathbf{v}_θ perpendicular a la anterior (ver Pag. 22)

$$E = E_c + U(q) = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 + U(q) = \frac{\mu}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \dot{\theta}^2) + U(q) = \text{cte} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{L}_{CM} = \mu q v_\theta = \text{cte}. \quad (5.38)$$

⁴Ver la Ec. 9.12 del capítulo *Complementos*.

5.5.3. Leyes de Kepler

A partir de las Ecs. 5.38 y 5.37 puede iniciarse el estudio del movimiento bajo cualquier fuerza central que no es el objetivo del presente curso. Nos limitaremos al caso particular del movimiento planetario, donde $\mathbf{F}(q)$ será la Ec. 4.3 en el límite en que una de las dos masas sea mucho mayor que la otra. Si $m_2 = m \ll m_1 = M$ entonces la masa reducida es $\mu \simeq m$ y la posición del CM es aproximadamente la de la masa mayor, $\mathbf{R}_{CM} \simeq \mathbf{r}_2$ donde podemos situar el origen del triedro S_{CM} como se muestra en la Fig. 5.4.

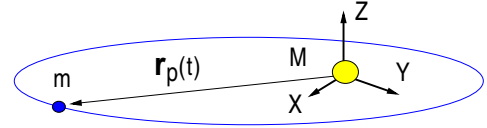


Figura 5.4: Órbita del planeta de masa m alrededor de otro de masa $M \gg m$.

Como hemos visto, el movimiento de la masa m ha de encontrarse contenido en un plano que pase por el origen O que hacemos coincidir con el plano (x, y) . Respecto de un triedro S_{CM} situado en M se conserva el momento cinético respecto de O como se deduce de la Ec. 4.44.

Uno de los primeros éxitos de la mecánica de Newton (1642-1727) que publicó sus *Principia* en 1687 fué la deducción de las leyes de Kepler (1571-1630). Estas últimas constituyen una síntesis de las observaciones disponibles hasta entonces del movimiento de los cuerpos celestes. Para los planetas del sistema solar, Kepler concluyó que,

1ª Ley: Las trayectorias de los planetas del sistema solar son elipses con el sol en uno de sus focos.

2ª Ley: El área $A(t)$ barrida por el radio vector $\mathbf{r}(t)$ que va del sol a cada planeta de masa m en la unidad de tiempo (denominada *velocidad areolar*) es constante en el tiempo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}_o|}{2m}.$$

3ª Ley: La relación entre el período T de la órbita y el semieje a de la elipse es

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

La segunda ley es una consecuencia de la conservación del momento cinético. Si consideramos un intervalo Δt pequeño como se observa en la Fig. 5.5 podemos escribir,

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$$

y como se observa en la figura 5.5 el área ΔA del triángulo formado por estos tres vectores es,

$$\Delta A = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura})$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t)| |\Delta \mathbf{r}| \sin \varphi = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge \Delta \mathbf{r}|$$

de modo que dividiendo por Δt y tomando el límite,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r} \wedge \Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{L}_o|}{2m}$$

en donde L_o representa el momento cinético respecto de uno de los focos de la elipse que es constante (Ec. 4.44) como se desprende de las Figs. 5.4 y 5.6. Si T es el período de la órbita,

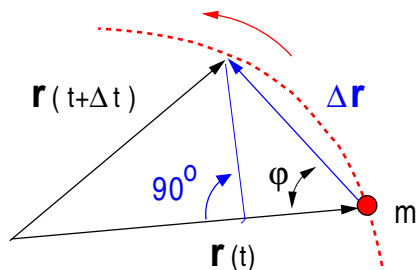


Figura 5.5: Dos posiciones sucesivas de la órbita separadas un intervalo de tiempo Δt pequeño.

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte} = \frac{A}{T} = \frac{\pi a b}{T}.$$

en donde a y b son los semiejes menor y mayor de la elipse ⁵.

Para deducir la tercera ley empleamos la conservación de la energía (5.37) y del momento cinético (5.38) entre dos puntos opuestos de la órbita: El más cercano r_m y mas alejado r_x al planeta mas pesado. En ellos se tienen respectivamente las velocidades máxima v_x y mínima v_m que son además perpendiculares a sus respectivos vectores de posición. Entonces,

$$m v_x r_m = m v_m r_x$$

$$\frac{m v_x^2}{2} - \frac{G M m}{r_m} = \frac{m v_m^2}{2} - \frac{G M m}{r_x}$$

Eliminamos v_x introduciendo $v_x^2 = (v_m r_x)^2 / r_m^2$ en la segunda ecuación de la forma,

$$v_m^2 - v_m^2 = (2GM) \left[\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_x} \right] > 0$$

de donde operando,

$$v_m^2 \left(\frac{r_x^2 - r_m^2}{r_m^2} \right) = 2GM \frac{r_x - r_m}{r_x r_m}$$

resulta,

$$(v_m r_x)^2 = 2GM \frac{r_x r_m}{r_x + r_m} \tag{5.39}$$

Podemos ahora introducir⁶ la relación de r_m y r_x con los parámetros de la elipse $r_m = a - c$, $r_x = a + c$ y $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\frac{r_x r_m}{r_x + r_m} = \frac{(a - c)(a + c)}{(a + c) + (a - c)} = \frac{b^2}{2a}$$

y como por otra parte $dA/dt = L_o/2m = (\pi ab)/T$ tendremos $v_m r_x = 2\pi ab/T$ y substituyendo en 5.39 se obtiene finalmente,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

⁵Las propiedades de la elipse se encuentran en la pag. 108.

⁶Ver Pag. 108.

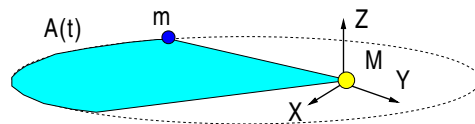


Figura 5.6: Area $A(t)$ de la elipse barrida por el radio vector $r(t)$ de la Fig. 5.4

5.6. Leyes de conservación

Momento: De las ecuaciones 5.9 y 5.1 se deduce que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{F}_T. \quad (5.40)$$

Entonces, si la resultante de las fuerzas aplicadas a un sistema de partículas es nula, $\mathbf{F}_T = \mathbf{0}$, se conserva el momento del sistema de partículas, $\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = M \mathbf{V}_{cm} = cte$ y la velocidad del centro de masas del sistema es constante. La utilidad de esta observación radica en que como la resultante de las fuerzas internas es nula, entonces cuando en un sistema solo hay fuerzas internas entonces el momento del sistema se conserva.

Por ejemplo, si dos partículas de masas m_1 y m_2 colisionan siendo $\mathbf{F}_T = \mathbf{0}$ sólo se encontrarán sometidas a las fuerzas internas que existen entre ambas. Puesto que el momento total \mathbf{P} es constante podremos escribir para dos instantes t antes y t' después de la colisión

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

en donde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ y $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ son las velocidades antes y después del choque.

Momento cinético: Respecto de un punto fijo A en S tendremos para el momento cinético,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{L}_{A\alpha} \right] = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{M}_{A\alpha}$$

y \mathbf{L}_A será un vector constante siempre que el momento total que actúe sobre el sistema sea nulo. Una condición suficiente, pero no necesaria para que esto suceda es que $\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I} = \mathbf{0}$ para cada partícula del sistema. Obsérvese que para que se conserve el momento cinético de un sistema de partículas no basta con que sea nula la resultante sobre el sistema.

Energía: En la Ec. 5.15 se ve que W_{CM} , W_{α} son nulos cuando $\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I} = \mathbf{0}$ para cada partícula del sistema (esta es una condición suficiente, pero no necesaria). Entonces, entre dos instantes t antes y t' después del choque,

$$\Delta E_c = \left[\frac{m_1 v_1^2}{2} \right]_t^{t'} + \left[\frac{m_2 v_2^2}{2} \right]_t^{t'} = W_{int}.$$

Puesto que en general $W_{int} \neq 0$ durante una colisión no tiene porqué conservarse la energía cinética de las partículas que intervienen. Si se conserva la energía $\Delta E_c = 0$ decimos que el choque es *elástico* y cuando $\Delta E_c < 0$ y el choque es *inelástico*. En las fotografías rápidas pueden observarse las deformaciones que experimentan los cuerpos durante los choques inelásticos. Estas deformaciones pueden ser permanentes o no. Si las dos partículas quedan rígidamente unidas después de la colisión el choque se denomina *perfectamente inelástico*.

Si el choque es inelástico necesitamos más información para poderlo resolver puesto que $W_{int} = \Delta E_c \neq 0$. En el caso de una colisión *perfectamente inelástica*, si \mathbf{V} es la velocidad conjunta de las dos partículas después del choque, podemos evaluar $W_{int} = \Delta E_c$ puesto que,

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}$$

$$W_{int} = (m_1 + m_2) \frac{V^2}{2} - \left[m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} \right]$$

Introduciendo el valor de V de la primera ecuación en la segunda resulta,

$$\frac{1}{2} (m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + m_2^2 v_2^2) = W_{int} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

y despejando W_{int} ,

$$W_{int} = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right] v_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} - m_2 \right] v_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

con lo que se obtiene,

$$W_{int} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2 - 2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = -\mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = -\frac{1}{2} \mu v_q^2$$

que es siempre negativo. No obstante, podríamos haber deducido directamente este resultado de la Ec. 5.33 teniendo en cuenta que puesto que \mathbf{V}_{CM} es constante, la variación de la energía cinética en el choque es justamente,

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} \mu v_q^2 = W_{int}$$

puesto que al quedar unidas las partículas $\mathbf{v}'_q = 0$.

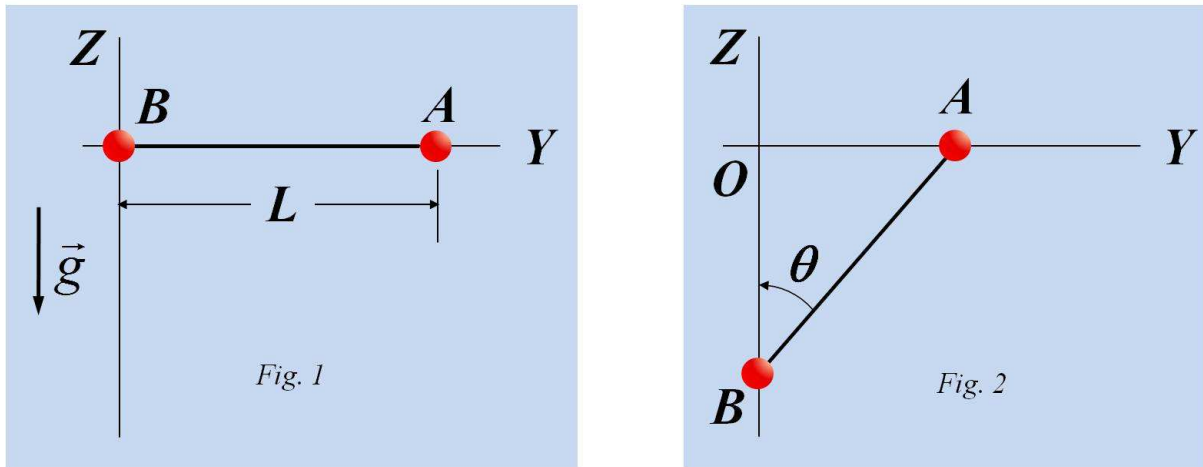
5.7. Problema resuelto

En la figura 5.7 se muestran dos abalorios A y B de la misma masa m y unidos por un hilo ideal de longitud L . Pueden deslizar sin rozamiento sobre dos varillas que coinciden con los ejes OY y OZ del plano vertical del triedro inercial de referencia $S(O; X; Y; Z)$.

Inicialmente los abalorios están sujetos mediante topes (no dibujados) en la posición de la figura de la izquierda. En $t = 0$, se retiran los topes. En la figura de la derecha se muestra una posición genérica del sistema en función del ángulo θ que forma el hilo con la vertical.

Se pide

1. Discutir cuántos grados de libertad tiene el sistema y las fuerzas que actúan sobre las partículas.
2. Vectores de posición, velocidad y aceleración de las partículas en ejes S en función de θ y sus derivadas.
3. Proyectar las fuerzas sobre las partículas en el sistema S .
4. Ecuaciones del movimiento y la ecuación diferencial que gobierna la evolución temporal de la variable θ .
5. Ecuación de la energía y $\dot{\theta} = f(\theta)$. Comprobar que esta ecuación es equivalente a la obtenida en el apartado anterior.

Figura 5.7: Partículas A y B de igual masa unidas por un hilo ideal.

6. Explicar cómo se obtendría $\theta(t)$ y las fuerzas en función del tiempo.
7. Ecuaciones del movimiento para el centro de masas y discutir si es posible resolver el problema (encontrar $\theta(t)$ y las reacciones) a partir de ellas.

Solución

1. Sin el hilo, el problema tendría dos grados de libertad, por ejemplo la distancia Y_A del eje OZ a la partícula A y la distancia Z_B del eje OY a la partícula B . El hilo introduce la ligadura $Y_A^2 + Z_B^2 = L^2$ por lo que en el problema tenemos $2 - 1 = 1$ grado de libertad. En lo que sigue tomamos el ángulo θ como coordenada para describir la posición de las partículas. Sobre las partículas A y B aparecen las fuerzas de tensión del hilo, los pesos y las reacciones de las guías.

2. Cinemática del sistema

$$\mathbf{r}_A = L \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_A = L \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_A = L (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \mathbf{j} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{r}_B = -L \cos \theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_B = L \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_B = L (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{k} \quad (5.42)$$

Se puede comprobar que la ecuación de ligadura, $|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = L$, se cumple.

3. Fuerzas sobre la partícula A

$$\mathbf{T}_A = -T (\sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \quad \mathbf{N}_A = N_A \mathbf{k} \quad \mathbf{P}_A = -mg \mathbf{k} \quad (5.43)$$

Fuerzas sobre la partícula B

$$\mathbf{T}_B = T (\sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \quad \mathbf{N}_B = N_B \mathbf{j} \quad \mathbf{P}_B = -mg \mathbf{k} \quad (5.44)$$

4. Ecuaciones del movimiento para A

$$-T \sin \theta = mL (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (5.45)$$

$$-T \cos \theta + N_A - mg = 0 \quad (5.46)$$

Ecuaciones del movimiento para B

$$T \sin \theta + N_B = 0 \quad (5.47)$$

$$T \cos \theta - mg = mL \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \quad (5.48)$$

El problema está cerrado ya que disponemos de 4 ecuaciones para las incógnitas $\theta(t)$, $N_A(t)$, $N_B(t)$ y $T(t)$. Las ecuaciones 5.46 y 5.47 están desacopladas y proporcionan las normales $N_A(t)$ y $N_B(t)$ una vez conocidas $T(t)$ y $\theta(t)$. Combinando las ecuaciones 5.45 y 5.48 se puede eliminar la tensión y obtener la ecuación diferencial que gobierna θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (5.49)$$

5. Ecuación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgL \cos \theta = W_{N_A} + W_{N_B} + W_{T_A} + W_{T_B} \quad (5.50)$$

Los trabajos de las normales N_A y N_B son nulos porque dichas fuerzas son perpendiculares a las velocidades de las partículas. Se puede comprobar que la suma de los trabajos de la tensión en A y en B es nulo (el hilo es inextensible). Utilizando las velocidades calculadas en el apartado 2 de cinemática tenemos:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g \cos \theta}{L} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g \cos \theta}{L}} \quad (5.51)$$

en donde se ha tomado el signo menos porque θ disminuye con el tiempo entre las dos posiciones indicadas en los paneles de la figura 5.7. Derivando con respecto al tiempo encontramos la ecuación 5.49. Una vez más comprobamos que la ecuación de la energía es consecuencia de la ecuación de cantidad de movimiento.

6. La ecuación de la energía anterior es una ecuación de variables separadas y proporciona $\theta(t)$:

$$-\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{L}} dt \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{2g}{L}} t = -\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \quad (5.52)$$

Conocido $\theta(t)$, con la ecuación 5.45 o 5.48 obtendríamos $T(t)$. Las reacciones de las guías $N_A(t)$ y $N_B(t)$ se calcularían con 5.46 y 5.47.

7. Para el centro de masas tenemos

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{L}{2} (\sin \theta \mathbf{j} - \cos \theta \mathbf{k}) \quad (5.53)$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{L}{2} \dot{\theta} (\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}) \quad (5.54)$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{L}{2} \left[\left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \mathbf{j} + \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \mathbf{k} \right] \quad (5.55)$$

En la ecuación de cantidad de movimiento para el centro de masas aparecen las fuerzas exteriores \mathbf{N}_A , \mathbf{N}_B , \mathbf{P}_A y \mathbf{P}_B pero no las fuerzas interiores \mathbf{T} . Se tiene

$$2m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) = N_B \quad (5.56)$$

$$2m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) = N_A - 2mg \quad (5.57)$$

Únicamente con estas dos ecuaciones no podríamos resolver el problemas ya que aparecen tres incognitas: $\theta(t)$, $N_A(t)$ y $N_B(t)$. El alumno puede comprobar que la ecuación 5.56 puede obtenerse a partir de las ecuaciones 5.45 y 5.47, mientras que la ecuación 5.57 es consecuencia de 5.46 y 5.48.

CAPÍTULO 6

SÓLIDO RÍGIDO: CINEMÁTICA, CENTRO DE MASAS Y MOMENTOS DE INERCIA

Los sólidos se deforman bajo la acción de las fuerzas. Sin embargo, para muchos problemas de mecánica es una aproximación muy buena suponer que no se deforman. Estos sólidos idealizados se llaman *sólidos rígidos*. Para facilitar el estudio de estos sólidos, en este capítulo supondremos que no están hechos de materia continua sino que están constituidos de N partículas de masas m_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) que mantienen constantes en el tiempo sus distancias relativas, es decir,

$$|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta| = C_{\alpha,\beta} \quad \forall \alpha, \beta. \quad (6.1)$$

Este capítulo aborda dos aspectos importantes que sirven de preparación al capítulo siguiente sobre la dinámica de un sólido. El primero es la cinemática, en donde se discuten los grados de libertad de un sólido rígido y el campo de velocidades del mismo. El segundo es el cálculo del centro de masas y los momentos de inercia de un sólido rígido que aparecerán de forma natural en las ecuaciones de la dinámica. Ambas propiedades del sólido dependen exclusivamente de cómo está distribuida la masa en el sólido, es decir, de su geometría y su densidad. Por lo tanto, la determinación del centro de masas y los momentos de inercia no dependen ni del estado dinámico ni de las fuerzas aplicadas por lo que es un cálculo que normalmente se realiza antes de estudiar la dinámica del sólido.

6.1. Cinemática del sólido rígido

6.1.1. Grados de libertad de un sólido rígido

Si aplicáramos directamente lo aprendido hasta el momento, el alumno podría pensar en resolver las $3N$ ecuaciones diferenciales 5.1 junto con las ligaduras 6.1. Como veremos a continuación, este procedimiento es, además de muy complejo, completamente innecesario ya que un sólido rígido tiene únicamente 6 grados de libertad.

Para estudiar el movimiento del sólido con respecto a un triedro S , tomemos un triedro auxiliar S' con origen A y que se mueve con el sólido. Dado que la distancia entre las partículas

es constante, para cualquier partícula P del sólido se tiene $\mathbf{v}'_P = \mathbf{0}$ y la ecuación 3.7 se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \overline{AP} \quad (6.2)$$

Si se coge un segundo triedro auxiliar S'' con origen en un punto B y también ligado al sólido, tenemos de nuevo $\mathbf{v}''_P = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega}_{S''S} \wedge \overline{BP}. \quad (6.3)$$

Al restar la ecuación 6.3 a 6.2 y usando $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP}$ tenemos

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\Omega}_{S''S} \wedge \overline{BA} + (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} - \boldsymbol{\Omega}_{S''S}) \wedge \overline{AP} = (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} - \boldsymbol{\Omega}_{S''S}) \wedge \overline{AP} \quad (6.4)$$

en donde se ha tenido en cuenta la ecuación 6.3 con $P = A$. Dado que la relación $(\boldsymbol{\Omega}_{S'S} - \boldsymbol{\Omega}_{S''S}) \wedge \overline{AP} = \mathbf{0}$ es válida para cualquier punto, hemos encontrado que $\boldsymbol{\Omega}_{S''S} = \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$. Por lo tanto, todos los triedros ligados al sólido tienen la misma velocidad angular, la cual llamaremos *velocidad angular del sólido* $\boldsymbol{\omega}$.

La ecuación 6.2 muestra que la velocidad de cualquier punto P del sólido se puede calcular en un instante t si conocemos la velocidad de un punto del sólido $\mathbf{v}_A(t)$ y la velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\omega}(t)$, es decir, 6 números reales. Esto es consistente con el número de grados de libertad de un sólido y con el número de cantidades que necesitamos para situar un triedro en el espacio con respecto a otro (3 números para situar su origen y los tres ángulos para orientar los ejes).

6.1.2. Reducción de sistemas de vectores deslizantes

Dos aplicaciones de la reducción de sistemas de vectores deslizantes en mecánica son: sistema de fuerzas aplicadas a un sólido rígido y campo de velocidades de un sólido rígido, que desarrollaremos en ésta y la siguiente subsección, respectivamente.

Una función vectorial es una función cuyo valor es un vector. Por ejemplo la velocidad de cada punto de un río. En física a las funciones vectoriales se las llama “campos vectoriales”. Un conjunto de vectores deslizantes (usualmente llamado “sistema de vectores deslizantes” en mecánica) $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^n$ define un campo vectorial, llamado “campo de los momentos” de la siguiente manera. A cada punto P se le asigna el vector (llamado “momento del sistema de vectores con respecto a P ”)

$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Pi} \wedge \mathbf{F}_i, \quad (6.5)$$

donde \mathbf{r}_{Pi} es el vector que va del punto P al punto de aplicación del vector \mathbf{F}_i . El objeto de esta subsección es mostrar que para todo sistema de vectores existe otro que consta sólo de su resultante y un par y que da lugar al mismo campo de momentos.

Sea un conjunto $\{\mathbf{F}_i\}$ de fuerzas aplicadas en puntos de un sólido rígido. Veremos que en las ecuaciones de movimiento de este sólido, del sistema de fuerzas sólo aparece su resultante y el momento de las fuerzas con respecto a algún punto A . La resultante es:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (6.6)$$

y el momento del sistema con respecto al punto A es:

$$\mathbf{M}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \wedge \mathbf{F}_i. \quad (6.7)$$

Recordamos aquí que el momento de un vector con respecto a cualquier punto no cambia cuando el vector se desliza a lo largo de su recta de acción, por esa razón hablamos de un sistema de vectores “deslizantes”.

Hay un caso muy sencillo de reducción de sistemas de vectores que ya conoce el alumno, y es que cuando varias personas tiran de una cuerda tensa y aplican fuerzas paralelas a ella en distintos puntos de la misma, las personas pueden situarse en distintos puntos de la cuerda o se pueden sustituir todas las fuerzas por su suma sin que cambie el efecto físico.

El momento de las fuerzas con respecto a cualquier otro punto B es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \sum_i \mathbf{r}_{Bi} \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{Ai}) \wedge \mathbf{F}_i = \\ &= \sum_i \mathbf{r}_{BA} \wedge \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_{BA} \wedge \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \wedge \mathbf{F}_i = \\ &= \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BA} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_A. \end{aligned} \quad (6.8)$$

De la fórmula precedente se deduce inmediatamente que:

I) Si dos sistemas de vectores tienen la misma resultante y el mismo momento en algún punto, entonces dan lugar al mismo campo de momentos.

II) $\mathbf{R} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A$, es decir, los sistemas de resultante nula dan lugar a un campo de momentos constante. Este es el caso, en particular, de un “par de fuerzas”, que son dos fuerzas iguales en módulo y dirección y opuestas en sentido.

III) $\mathbf{r}_{BA} \parallel \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A$, es decir, el espacio queda dividido en rectas paralelas a \mathbf{R} y el momento del sistema de vectores es constante en cada recta.

IV) $\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R}$, es decir, la componente del vector \mathbf{M}_A paralela a \mathbf{R} no cambia.

El vector momento en un punto es suma de una componente paralela a \mathbf{R} y otra perpendicular a \mathbf{R} . Puesto que la primera, en virtud de IV), es constante, si hay alguna recta en la que la segunda se anule, entonces en esa recta el momento será de módulo mínimo. Esa recta, como veremos, existe y se llama “eje central”. Puesto que el eje central es paralelo a \mathbf{R} , para encontrarlo bastará encontrar un punto C del mismo. Vamos a localizar el eje central partiendo del conocimiento de la resultante \mathbf{R} y del momento \mathbf{M}_A en algún punto arbitrario A . En cualquier punto C del eje central, por definición, $\mathbf{M}_C \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_C \wedge \mathbf{R} = (\mathbf{r}_{CA} \wedge \mathbf{R}) \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R} = -R^2 \mathbf{r}_{CA} + (\mathbf{r}_{CA} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} + \mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R}. \quad (6.9)$$

Dada una recta y un punto exterior a la misma, siempre existe un segmento que los une y que es perpendicular a la recta. Vamos a aprovechar eso para escoger un punto C del eje central

de tal manera que $\mathbf{r}_{AC} \perp \mathbf{R}$, y entonces podemos despejar la posición de C de la ecuación anterior:

$$\mathbf{r}_{AC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{R^2}. \quad (6.10)$$

Por tanto el eje central es el conjunto de puntos:

$$\left\{ \mathbf{r}_A + \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{|\mathbf{R}|^2} + \lambda \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \lambda \text{ recorre los números reales} \right\} \quad (6.11)$$

Volviendo a la reducción del sistema, vamos a descomponer el “campo de momentos” en una parte constante y paralela a la resultante que vendrá dada por un par y otra parte perpendicular a la resultante que será, precisamente, el momento de la resultante. Siempre podemos descomponer \mathbf{r}_{Ai} así: $\mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{r}_{Ai} - \mathbf{r} + \mathbf{r}$. Escogemos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AC}$, y entonces

$$\mathbf{M}_A = \sum_i (\mathbf{r}_{Ai} - \mathbf{r}_{AC}) \wedge \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{AC} \wedge \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \wedge \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{AC} \wedge \mathbf{R} = \left(\mathbf{M}_A \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right) \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} + \mathbf{r}_{AC} \wedge \mathbf{R}, \quad (6.12)$$

de manera que el primer término es el momento con respecto a un punto del eje central, que es, por definición de eje central, $(\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R}/|\mathbf{R}|)(\mathbf{R}/|\mathbf{R}|)$. Aunque en el sistema original pueda haber muchos vectores, el primer término puede obtenerse de un solo par de vectores, y $\mathbf{r}_{AC} \wedge \mathbf{R}$ puede obtenerse de tan solo la resultante situada en un punto cualquiera del eje central.

Cuando el sistema de vectores está en un plano, entonces los momentos son perpendiculares a la resultante, por lo que el primer término de la última igualdad se anula y el campo de vectores es el mismo que crearía la resultante aplicada en cualquier punto del eje central.

6.1.3. Campos de velocidades y aceleración de un sólido rígido

La condición de rigidez implica que las velocidades en dos puntos cualesquiera A y B de un sólido rígido se relacionan de la siguiente manera (ver ec. 6.3):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{AB}, \quad (6.13)$$

de donde se deduce que el conocimiento de la velocidad de un punto cualquiera y de la velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ determina el campo de velocidades.

Las observaciones I) - IV) y las fórmulas 6.9-6.12 se dedujeron tan solo de la fórmula 6.8 (no se emplearon las 6.5-6.7), por lo que se llega a las mismas conclusiones para el campo de velocidades sin más que repetir los mismos razonamientos a partir de la última fórmula. Estas conclusiones son:

En cualquier instante de tiempo el campo de velocidades de un sólido rígido es helicoidal, esto es, tiene la forma:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{CP}, \quad (6.14)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del sólido y \mathbf{v}_t es una velocidad de traslación paralela a $\boldsymbol{\omega}$. El eje instantáneo de rotación es de dirección paralela a $\boldsymbol{\omega}$ y su posición viene dada por:

$$\mathbf{r}_{PC} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P}{\omega^2}, \quad (6.15)$$

donde C es el punto del eje instantáneo de rotación más próximo al punto P . El eje instantáneo de rotación no tiene por qué cortar al sólido.

Cuando una placa plana se mueve en el plano que la contiene, $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular al plano, por lo que \mathbf{v}_t ha de ser nula, ya que de otro modo sacaría a la placa del plano. Por tanto el campo de velocidades de una placa que se mueve en el plano es el de una rotación en torno a un centro instantáneo de rotación:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{CP}. \quad (6.16)$$

Este es también el campo de velocidades de un sólido rígido en el que $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$, y por tanto sus velocidades son paralelas a cualquier plano perpendicular al eje instantáneo de rotación. En efecto, en este caso la intersección del sólido rígido con cualquier plano perpendicular al eje instantáneo de rotación es una figura bidimensional con vectores velocidad en dicho plano, y estamos en el caso de movimiento en el plano. En este caso se dice que el sólido efectúa un *movimiento plano*.

Si se conocen las velocidades en dos puntos las fórmulas 6.13 y 6.14 permiten despejar $\boldsymbol{\omega}$ y la posición del eje, respectivamente.

Para el movimiento en dos dimensiones hay un método gráfico. Dibujamos las perpendiculares a \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B que pasen por los puntos A y B . El centro instantáneo de rotación O está en la intersección de las perpendiculares y

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\mathbf{v}_A|}{|\mathbf{r}_{OA}|} = \frac{|\mathbf{v}_B|}{|\mathbf{r}_{OB}|}. \quad (6.17)$$

Si las dichas perpendiculares son coincidentes, el centro instantáneo de rotación está en la intersección entre la perpendicular y la recta que une las puntas de los vectores velocidad.

Por último, el campo de aceleraciones de un sólido se obtiene tomando \mathbf{v}'_P y \mathbf{a}'_P en la ecuación 3.8

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_A + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \wedge \overline{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \overline{AP}). \quad (6.18)$$

6.2. Centro de masas de un sólido rígido

Cuando el número N de partículas que componen un cuerpo macroscópico es muy elevado, en lugar de enumerar sus posiciones, se acude a una descripción mediante la función continua *densidad*, la masa por unidad de volumen, que se define

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V},$$

donde $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z)$ es una función continua en cada punto \mathbf{r} del cuerpo considerado. Como se indica en la figura 6.1 la masa δM contenida en un pequeño elemento de volumen δV sería $\delta M = \rho(\mathbf{r}) \delta V$ de modo que,

$$M = \int_{V_S} dM = \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) dV$$

donde $dV = dx dy dz$ es el elemento de volumen y la integral se extiende sobre el volumen V_S del sólido S . La densidad $\rho(\mathbf{r})$ es una función que –en general– tomará diferentes valores en cada punto \mathbf{r} del sólido y es nula ($\rho(\mathbf{r}) = 0$) para puntos del espacio fuera de S . Cuando la densidad es uniforme, es decir $\rho(\mathbf{r})$ tiene un valor constante ρ_0 , se dice que el sólido es *homogéneo*.

Para caracterizar la posición del centro de masas generalizamos las definiciones de la página 52 para un cuerpo continuo empleando la densidad $\rho(\mathbf{r})$. Sustituimos m_α por $dm = \rho(\mathbf{r}) dV$ de modo que el vector centro de masas resulta

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV, \quad (6.19)$$

siendo sus tres coordenadas

$$X_{cm} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) x dV \quad Y_{cm} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) y dV \quad Z_{cm} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) z dV.$$

Atendiendo a las características del cuerpo (placas planas o alambres) resulta más sencillo calcular el CM introduciendo en las definiciones anteriores la densidad de masa superficial $\sigma(\mathbf{r})$ (masa por unidad de superficie) o lineal $\lambda(\mathbf{r})$ (masa por unidad de longitud) y los elementos de área $dS = dx dy$ y de longitud dL ,

$$M_S = \int_S dm = \int_{A_S} \sigma(\mathbf{r}) dS$$

y asimismo,

$$M_L = \int_L dm = \int_{L_S} \lambda(\mathbf{r}) dL.$$

Obviamente las integrales están extendidas sobre el área A_S y la longitud L_S del cuerpo considerado, respectivamente. Para una placa tendremos,

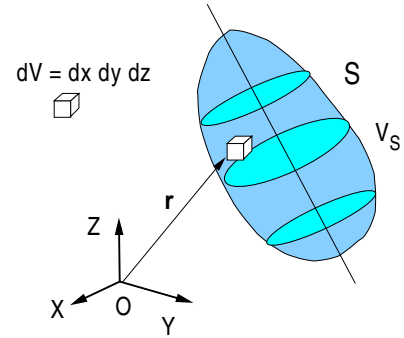


Figura 6.1: Elemento de volumen dV del sólido S .

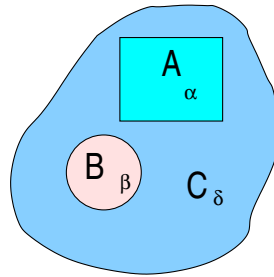


Figura 6.2: Sólido compuesto de tres partes (A, B, C) con tres tipos de partículas (α, β, δ).

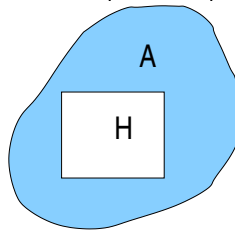


Figura 6.3: Sólido A con un hueco H .

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M_S} \int_{A_S} \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad \text{y en el caso del alambre,} \quad \mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M_L} \int_{L_S} \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dL.$$

6.2.1. Cálculo de centros de masas

En el caso de sólidos homogéneos o cuerpos compuestos de varios sólidos homogéneos el cálculo de la integral 6.19 se simplifica y el centro de masas puede determinarse mediante la aplicación de unas reglas sencillas.

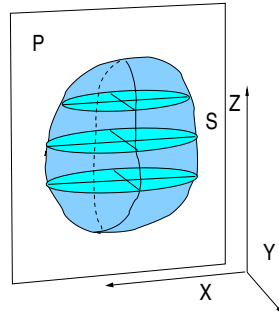
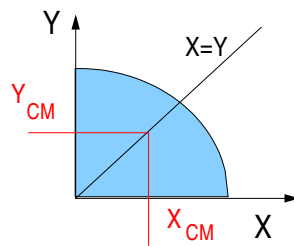
1. Si un sólido se compone de varias partes, la posición de su CM se obtiene considerando cada elemento como una partícula puntual, cuya masa es igual a la del elemento considerado situada en su correspondiente centro de masas.

Como se ve en la Fig. 6.2 la masa del cuerpo será la suma de la de sus elementos,

$$M = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} m_\beta + \sum_{\delta=1}^{N_\delta} m_\delta = M_A + M_B + M_C$$

donde N_α, N_β y N_δ son el número de partículas de cada especie y la posición del centro de masas de cada uno de sus elementos será $\mathbf{R}_{cm}^A, \mathbf{R}_{cm}^B$ y \mathbf{R}_{cm}^C . Con la definición de centro de masas,

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \left(\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} m_\beta \mathbf{r}_\beta + \sum_{\delta=1}^{N_\delta} m_\delta \mathbf{r}_\delta \right)$$

Figura 6.4: Sólido simétrico respecto al plano P .Figura 6.5: Centro de masas de una placa plana de radio R .

y multiplicando y dividiendo por la masa de cada una de las partes se obtiene,

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{M_A \mathbf{R}_{cm}^A + M_B \mathbf{R}_{cm}^B + M_C \mathbf{R}_{cm}^C}{M_A + M_B + M_C}$$

Esta expresión es equivalente a descomponer el sólido en varias partes y calcular el centro de masas del conjunto como si cada uno de sus bloques fuese una partícula puntual, situada en la posición del CM correspondiente, cuya masa es igual a la de cada bloque.

2. La posición del centro de masas de un cuerpo con un hueco se obtiene combinando la posición del CM del cuerpo con la del hueco, relleno éste con la misma densidad de masa que el resto pero asignándole una masa negativa.

Si el hueco H del cuerpo de la Fig. 6.3 estuviese *relleno* su masa sería M_H y la del conjunto $M = M_A + M_H$. La posición del centro de masas \mathbf{R}_{cm} vendría dada por,

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{M_A \mathbf{R}_{cm}^A + M_H \mathbf{R}_{cm}^H}{M}$$

donde \mathbf{R}_{cm}^H representa la posición del CM del *hueco relleno*. Si despejamos \mathbf{R}_{cm}^A que es el vector que buscamos.

$$\mathbf{R}_{cm}^A = \frac{M \mathbf{R}_{cm} - M_H \mathbf{R}_{cm}^H}{M - M_H}$$

Como vemos, esta expresión es equivalente a calcular la posición del CM del cuerpo relleno \mathbf{R}_{cm} más el del hueco \mathbf{R}_{cm}^H pero asignándole una masa M_H negativa.

3. Si un sólido homogéneo tiene un plano de simetría, entonces el centro de masas se encuentra en dicho plano.

Supongamos que el sólido de la Fig. 6.4 compuesto por M partículas es simétrico respecto del plano P que hacemos coincidir con el plano (X, Z) como se observa en la Fig. 6.4.

Puesto que el cuerpo es simétrico, hay el mismo número N de partículas a cada lado del plano (X, Z) y Q partículas están situadas sobre el plano (X, Z) , de manera que $2N + Q$ es el número total de partículas. Por simetría, para cada una de las N masas m_α con coordenada y_α a un lado del plano existirá otra igual en el lado opuesto, con coordenada $-y_\alpha$, que es su imagen especular. La coordenada Y es nula para las Q partículas sobre el plano X, Z . Entonces, para la coordenada Y_{CM} tendremos,

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha y_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (-y_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^Q m_\alpha (y_\alpha = 0) \right) = 0$$

4. El centro de masas de un sólido **homogéneo** se encuentra en la intersección de sus elementos de simetría.

Puede repetirse el mismo argumento para cualquier otro elemento de simetría, de modo que si un sólido homogéneo es simétrico respecto de dos planos, el centro de masas ha de encontrarse en el eje que forma la intersección de ambos.

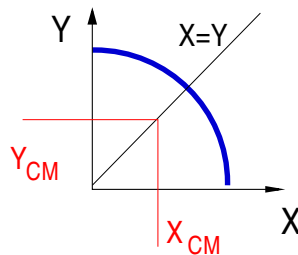


Figura 6.6: Centro de masas de una varilla circular de radio R .

5. Para situar el centro de masas de placas planas o varillas **homogéneas** podemos emplear el siguiente teorema, que no demostraremos¹:

Teorema de Pappus-Guldin: Para una placa de área A (o varilla de longitud L) la distancia D_{CM} del centro de masas a un eje coplanario que no la corta satisface

¹La demostración se encuentra en el Capítulo 17, sección II, pags. 230-232 de la Ref. [5].

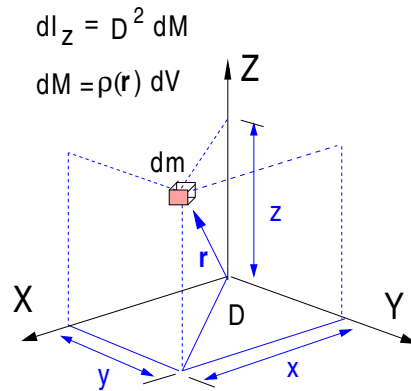


Figura 6.7: Distancia $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ del elemento de volumen dM al eje Z .

$$2\pi D_{CM} \times \begin{bmatrix} A \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ A_g \end{bmatrix},$$

en donde V_g es el volumen (área A_g) engendrado por la placa de área A (varilla de longitud L) al girar en torno al eje.

Ejemplos: En la placa plana de la Fig. 6.5 de radio R y densidad superficial de masa σ_o uniforme ha de tenerse $X_{CM} = Y_{CM}$ por simetría. Imaginemos que la hacemos rotar alrededor del eje Y , utilizando el teorema anterior con $D_{CM} = X_{CM}$,

$$2\pi X_{CM} \times \left(\frac{1}{4} \times \pi R^2 \right) = \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \right]$$

$$\text{luego, } Y_{CM} = X_{CM} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Para el cuarto de círculo de alambre de radio R y densidad lineal de masa λ_o uniforme de la Fig. 6.5 también tendremos por simetría $X_{CM} = Y_{CM}$ y rotándolo alrededor del eje Y ,

$$2\pi X_{CM} \times \left(\frac{1}{4} \times 2\pi R \right) = \left[\frac{1}{2} \times (4\pi R^2) \right] \text{ y tendremos, } Y_{CM} = X_{CM} = \frac{2R}{\pi}.$$

6.3. Momentos de inercia

Los momentos de inercia de un sólido rígido aparecen en las ecuaciones que describen su dinámica de rotación. Tienen dimensiones de masa por longitud al cuadrado y como veremos en el capítulo siguiente, desempeñan un papel análogo al de la masa inercial en el caso de un movimiento rectilíneo.

Los momentos de inercia de un sólido se definen respecto de un elemento geométrico que puede ser un punto, una recta o un plano. Por ejemplo, el momento de inercia I_o de N

partículas de masa m_α con respecto al punto O viene dado por

$$I_o = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha D_\alpha^2 \quad (6.20)$$

en donde D_α es la distancia de la partícula α al punto O . Si quisieramos calcular el momento de inercia con respecto a un eje I_E o a un plano I_P , utilizaríamos la ecuación 6.20 siendo D_α la distancia de la partícula α al eje o al plano respectivamente.

Para calcular el momento de inercia de un sólido rígido debemos cambiar el sumatorio en la Ec. 6.20 por una integral extendida al sólido de modo semejante al procedimiento seguido al calcular centros de masas. Tomando $dM = \rho(\mathbf{r}) dV$ y $dI_o = D^2 dM$ e integrando,

$$I_o = \int_{V_S} D^2 dM = \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) D^2 dV \quad (6.21)$$

donde D representa la distancia del diferencial de masa dM al punto, eje o plano (ver Fig. 6.7).

Los momentos de inercia presentan una serie de propiedades que ayudan a calcularlos:

1. Los momentos de inercia son siempre cantidades *positivas* ($I > 0$).
2. Los momento de inercia son *aditivos*. Si un sólido está compuesto de varias partes, su momento de inercia respecto a un punto, un eje o un plano es igual a la suma de los momentos de inercia de cada una de sus partes respecto al punto, el eje o el plano, respectivamente.
3. El momento de inercia respecto al eje E definido por la intersección de dos planos perpendiculares P y P' es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los dos planos.

$$I_E = I_P + I_{P'} \quad (6.22)$$

4. El momento de inercia con respecto a un punto O definido por la intersección de tres planos ortogonales entre sí P , P' y P'' es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a los tres planos

$$I_o = I_P + I_{P'} + I_{P''} \quad (6.23)$$

5. El momento de inercia con respecto a un punto O en donde se cortan tres rectas ortogonales (por ejemplo los ejes OX , OY y OZ) es igual a la mitad de la suma de los momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes

$$I_o = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) \quad (6.24)$$

Para demostrarlo multiplicamos por dos la ecuación 6.23

$$2 I_o = 2 I_P + 2 I_{P'} + 2 I_{P''} \quad (6.25)$$

la cual también se escribe como

$$2 I_o = (I_P + I_{P'}) + (I_{P'} + I_{P''}) + (I_{P''} + I_P) \quad (6.26)$$

Usando la relación 6.22 se obtiene la ecuación 6.24.

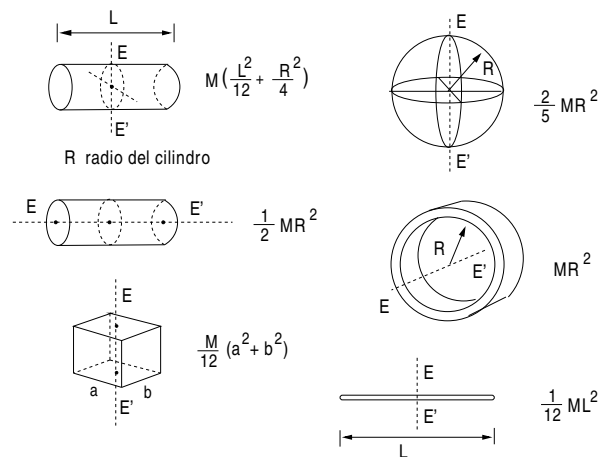


Figura 6.8: Momentos de inercia de algunos sólidos homogéneos calculados respecto del eje EE' indicado en cada figura.

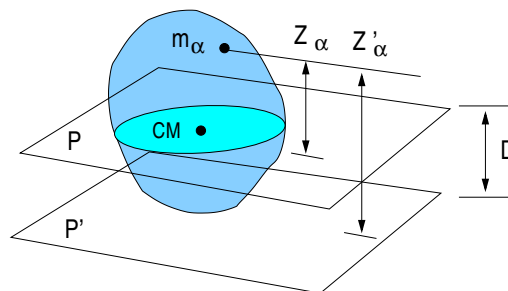


Figura 6.9: Teorema de Steiner para planos.

6.3.1. Teorema de Steiner

Los momentos de inercia de los sólidos homogéneos más comunes se muestran en la Figura 6.8 y están calculados respecto de un eje EE' que pasa por su centro de masas. Gracias a que los objetos tienen ciertas simetrías con respecto a ese eje, ha sido posible realizar el cálculo utilizando la ecuación 6.21. Como veremos a continuación, si se desea conocer el momento de inercia con respecto a otro eje paralelo a EE' , no es necesario volver a realizar la integral 6.21 ya que se puede hacer uso del **Teorema de Steiner**:

El momento de inercia respecto de un plano P' (eje E') es la suma del momento de inercia respecto de otro plano P (eje E) paralelo que contenga al centro de masas, más el producto de la masa M del cuerpo por la distancia D al cuadrado entre ambos planos (ejes).

Para demostrar el Teorema de Steiner para planos disponemos de la figura 6.9 en donde se muestra un sólido rígido, un plano P que pasa por su centro de masas y un plano P' paralelo al anterior. La distancias de un elemento de masa al plano P y P' se denotan por Z_α y Z'_α , respectivamente. El momento de inercia respecto a P' es

$$I_{P'} = \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} Z'_{\alpha}{}^2$$

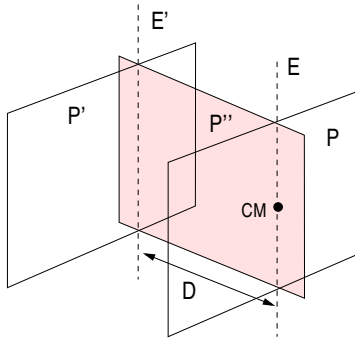


Figura 6.10: Teorema de Steiner para ejes.

y sustituyendo la relación $Z'_\alpha = Z_\alpha + D$,

$$I_{P'} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} Z_{\alpha}^2 + \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) D^2 + 2D \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} Z_{\alpha} \right)$$

El primer sumando es el momento de inercia I_P respecto del plano P y el tercero es nulo por contener P el centro de masas con lo cual obtenemos (*teorema de Steiner para planos*),

$$I_{P'} = I_P + M D^2$$

Podemos emplear este resultado para los dos ejes paralelos definidos por la intersección de los tres planos perpendiculares de la Fig. 6.10. Tendremos,

$$I_{E'} = I_{P'} + I_{P''} \quad \text{y} \quad I_E = I_P + I_{P''}$$

restando ambas ecuaciones, $I_{E'} - I_E = I_{P'} - I_P = M D^2$ se tiene el *teorema de Steiner para ejes*,

$$I_{E'} = I_E + M D^2.$$

CAPÍTULO 7

DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

En la sección 6.1 vimos que un sólido tiene 6 grados de libertad y que desde un punto de vista cinemático es completamente equivalente a un triedro ligado a él. Dichos grados de libertad pueden venir dados, por ejemplo, por las tres coordenadas del origen del triedro y los tres ángulos que necesitamos para orientar sus ejes.

Dado un conjunto de fuerzas aplicadas sobre el sólido, vamos a hallar ahora las ecuaciones que gobiernan cómo varían con el tiempo estas seis cantidades. En particular, vamos a hallar las leyes que describen la evolución con el tiempo de la velocidad del centro de masas del sólido (3 ecuaciones) y de su velocidad angular (3 ecuaciones). Por último, deduciremos la ecuación de la energía, la cual no añade información con respecto a estas ecuaciones pero es de gran utilidad en una gran variedad de problemas.

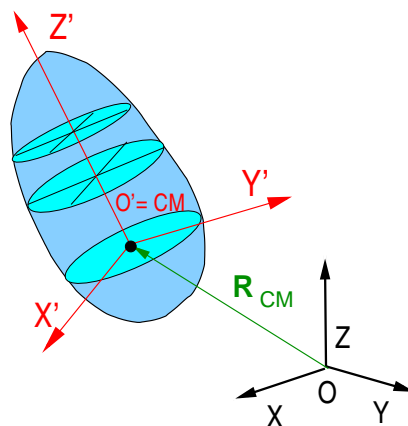


Figura 7.1: Movimiento del CM de un sólido respecto del triedro S .

7.1. Ecuación de la cantidad de movimiento

Para describir el movimiento del centro de masas de un sólido podemos emplear las ecuaciones 5.7 que obtuvimos para un sistema de partículas. La trayectoria $\mathbf{R}_{cm}(t)$ del CM del sólido respecto de un triedro S (no necesariamente inercial) viene dada por

$$M \frac{d\mathbf{V}_{cm}}{dt} = \mathbf{F}_T, \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}), \quad (7.1)$$

donde \mathbf{F}_T es la resultante aplicada en el CM de las fuerzas que actúan sobre el sólido. Dado un conjunto de condiciones iniciales, $\mathbf{R}_{cm}(t=0)$ y $\mathbf{V}_{cm}(t=0)$, esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden puede integrarse para dar $\mathbf{R}_{cm}(t)$ y $\mathbf{V}_{cm}(t)$.

Hay que subrayar que las ecuaciones 7.1 son idénticas a las ecs. 4.16 para la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ de una partícula. En consecuencia, la dinámica de un punto material ideal que analizamos en el Cap. 4 puede aplicarse al estudio del movimiento del CM de un sólido donde hemos hecho abstracción de su extensión considerando sólo su movimiento de traslación e ignorando su movimiento de rotación alrededor del CM.

7.2. Ecuación del momento cinético

Como veremos a continuación, la dinámica de rotación de un sólido viene gobernada por la ecuación de momento cinético estudiada en el capítulo de sistema de partículas. Si A es un punto fijo ($A = Q$) o el centro de masas del sólido ($A = CM$), tenemos respecto de un triedro S no necesariamente inercial

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{M}_A, \quad (7.2)$$

donde el momento cinético del sistema \mathbf{L}_A y los momentos de las fuerzas \mathbf{M}_A respecto al punto A son

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (7.3)$$

$$\mathbf{M}_A = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}). \quad (7.4)$$

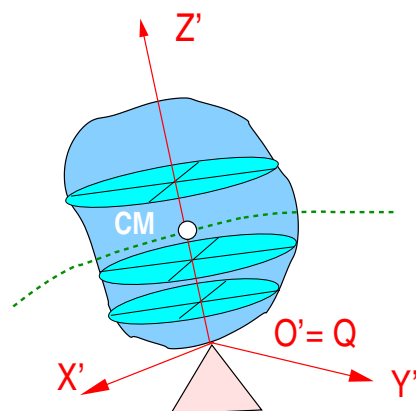


Figura 7.2: Movimiento con un punto fijo $Q \equiv O'$ o pivote respecto del que se mueve el CM.

Es conveniente introducir un segundo triedro S' ligado al sólido y con origen en A (su centro de masas o en el punto con velocidad nula Q). Como se observa en las Figs. 7.1 y 7.2, el CM tiene velocidad nula respecto de S' pero en general $\mathbf{V}_{cm} \neq \mathbf{0}$ respecto de S , mientras que el punto de apoyo Q (pivote) tiene velocidad nula $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ respecto de S' y S .

El momento cinético de un sólido, dado por la ecuación 7.3, puede escribirse de manera mucho más eficaz si introducimos la identidad $\mathbf{r}'_\alpha \equiv \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A$ y la ecuación para el campo de velocidades de un sólido $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha$:

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}'_{\alpha} \wedge m_{\alpha} [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}] = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \wedge \mathbf{v}_A + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}).$$

Las dos elecciones anteriores para el punto A hacen nulo el primer sumando; si $A \equiv CM$, entonces $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{0}$ y en el caso de ser un punto de apoyo o pivote ($A \equiv Q$) se tiene $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Al utilizar la regla de la expulsión para el triple producto vectorial, se obtiene

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (|\mathbf{r}'_{\alpha}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_{\alpha}) \mathbf{r}'_{\alpha}). \quad (7.5)$$

Al desarrollar esta ecuación se halla el momento cinético del sólido respecto al punto A proyectado en ejes S' :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A = & \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [r'_{\alpha}{}^2 \omega_{x'} - (x'_{\alpha} \omega_{x'} + y'_{\alpha} \omega_{y'} + z'_{\alpha} \omega_{z'}) x'_{\alpha}] \mathbf{i}' + \\ & \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [r'_{\alpha}{}^2 \omega_{y'} - (x'_{\alpha} \omega_{x'} + y'_{\alpha} \omega_{y'} + z'_{\alpha} \omega_{z'}) y'_{\alpha}] \mathbf{j}' + \\ & \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [r'_{\alpha}{}^2 \omega_{z'} - (x'_{\alpha} \omega_{x'} + y'_{\alpha} \omega_{y'} + z'_{\alpha} \omega_{z'}) z'_{\alpha}] \mathbf{k}'. \end{aligned}$$

La expresión anterior se escribe de forma mucho más compacta utilizando los momentos y productos de inercia estudiado en el capítulo 6. Por ejemplo, recordando que el momento de inercia respecto al eje x' es

$$I_{x'x'} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (y'_{\alpha}{}^2 + z'_{\alpha}{}^2) \quad (7.6)$$

y que los productos de inercia respecto a los ejes x' e y' y x' y z' son respectivamente

$$I_{x'y'} = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} \quad \text{y} \quad I_{x'z'} = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha}, \quad (7.7)$$

podemos escribir la componente según \mathbf{i}' en la ecuación 7.6 como

$$\left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (r'_{\alpha}{}^2 - x'_{\alpha}{}^2) \right) \omega_{x'} - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} \right) \omega_{y'} - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha} \right) \omega_{z'} =$$

$$I_{x'x'} \omega_{x'} + I_{x'y'} \omega_{y'} + I_{x'z'} \omega_{z'}.$$

Procediendo de forma análoga con las otras componentes de la ecuación 7.6 y utilizando notación matricial hallamos

$$\begin{pmatrix} L_{Ax'} \\ L_{Ay'} \\ L_{Az'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

o

$$\mathbf{L}_A = \bar{\bar{I}}_A \bullet \boldsymbol{\omega}. \quad (7.9)$$

La matriz $\bar{\bar{I}}_A$ se denomina *tensor de inercia* y a partir de las definiciones de sus elementos, los productos de inercia (ec. 7.7) y momentos respecto de los ejes, X' , Y' y Z' (ec. 7.6) se hace evidente que es *simétrica*, $I_{ij} = I_{ji}$. Además, los elementos de la matriz $\bar{\bar{I}}_A$ están evaluados en el triedro S' y sólo dependen de la distribución de las masas m_α del sólido y no de su movimiento.

Es importante resaltar que el tensor de inercia está definido con respecto a un punto en el espacio y por lo tanto depende de la elección de éste. Fijado el punto, las componentes del tensor de inercia también dependen de cómo estén elegidos los ejes S' con origen en él. Puesto que el tensor de inercia es simétrico, existe una elección determinada del triedro S' en la que el tensor de inercia $\bar{\bar{I}}_A$ es diagonal. Para estos ejes particulares ¹ denominados *ejes principales de inercia*, los productos de inercia son nulos,

$$I_{ii} > 0 \quad \text{e} \quad I_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

También se demuestran las siguientes propiedades para sólidos homogéneos:

1. *Todas las rectas normales a un plano de simetría son ejes principales de inercia con respecto a sistemas de referencia con origen en el punto de corte con el plano.*
2. *Si el sólido es de revolución, entonces con respecto a sistemas de referencia con origen en algún punto del eje de revolución, el propio eje y todas las rectas normales al eje son ejes principales.*

La ec. 7.8 pone de manifiesto que los vectores \mathbf{L}_A y $\boldsymbol{\omega}$ *no son en general paralelos*. En efecto, no hay más que tomar un sistema de referencia S' de tal manera que sus ejes coincidan con los ejes principales de inercia del sólido en A , esto es, que diagonalice al tensor de inercia. Entonces:

$$\mathbf{L}_A = I_{x'x'} \omega_{x'} \mathbf{i}' + I_{y'y'} \omega_{y'} \mathbf{j}' + I_{z'z'} \omega_{z'} \mathbf{k}'. \quad (7.10)$$

Cuando los tres autovalores sean iguales, $I_{x'x'} = I_{y'y'} = I_{z'z'}$, entonces \mathbf{L}_A y $\boldsymbol{\omega}$ son siempre paralelos. En caso contrario, solo serán paralelos cuando $\boldsymbol{\omega}$ sea autovector del tensor de inercia.

Una vez calculado el momento cinético en función del tensor de inercia, estamos en situación de escribir la ecuación 7.2 para un sólido rígido. Es importante observar que el momento cinético \mathbf{L}_A lo tenemos proyectado en ejes S' mientras que la derivada temporal que aparece en el lado izquierdo de la ecuación 7.2 es con respecto a S . Usando la ecuación 7.9 y teniendo en cuenta que la derivada temporal del tensor de inercia $\bar{\bar{I}}$ en ejes S' es nula, encontramos

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_A = \bar{\bar{I}} \bullet \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_A \quad (7.11)$$

¹Sobre este punto puede consultarse la sección 9.13.

Si se toma los ejes del sistema S' coincidiendo con los principales de inercia del sólido en A , se llega al siguiente sistema de ecuaciones ² para el movimiento de rotación de un sólido,

$$I_{x'x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'z'} - I_{y'y'}) \omega_{z'} \omega_{y'} = M_{Ax'} \quad (7.12)$$

$$I_{y'y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'x'} - I_{z'z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} = M_{Ay'} \quad (7.13)$$

$$I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'y'} - I_{x'x'}) \omega_{y'} \omega_{x'} = M_{Az'} \quad (7.14)$$

Es importante subrayar que $M_{Ax'}$, $M_{Ay'}$ y $M_{Az'}$ son las componentes en S' del momento de las fuerzas exteriores y de inercia (en caso de ser S no inercial) con respecto al punto A . Estas tres ecuaciones, que son válidas únicamente si el punto A es el centro de masas o un punto fijo, pueden integrarse junto con las correspondientes condiciones iniciales para encontrar la evolución en el tiempo del movimiento de rotación del sólido.

El análisis general de las soluciones del sistema de ecuaciones 7.12-7.14 es muy complicado y excede el ámbito del presente curso, por lo que sólo estudiaremos el caso particular del denominado *movimiento plano*.

7.3. Ecuación de la energía

Energía cinética de un sólido rígido

Las ecuaciones 7.1 y 7.12-7.14 describen completamente la dinámica del sólido. Sin embargo, y en analogía con lo realizado para la dinámica de la partícula y los sistemas de partículas, vamos a deducir a partir de ellas la ecuación de la energía. La razón es que aunque la ley horaria no puede obtenerse de la ecuación de la energía, ésta es suficiente para resolver gran cantidad de problemas.

En primer lugar, vamos a escribir la energía de un sólido rígido en función de la velocidad de su centro de masas, su velocidad angular y de sus propiedades inerciales (masa y tensor de inercia). Como sabemos del capítulo de sistemas de partículas, la energía cinética es

$$E_c = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2. \quad (7.15)$$

Sin embargo, el hecho de que la distancia relativa entre partículas sea constante proporciona el campo de velocidades $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}$ y sustituyendo

$$E_c = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}] \cdot [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}] = \frac{M}{2} v_A^2 + \mathbf{v}_A \cdot \left[\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \right] + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}|^2. \quad (7.16)$$

El segundo sumando es nulo tanto si A es el CM ($\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{0}$) como si es un pivote o un punto en reposo ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$). El tercer término puede escribirse en función del momento cinético del sólido si hacemos la siguiente manipulación, donde $\mathbf{C} \equiv \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}$,

$$|\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}|^2 = \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_{\alpha} \wedge \mathbf{C}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_{\alpha} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}]). \quad (7.17)$$

²Son denominadas *ecuaciones de Euler*.

Teniendo en cuenta este resultado y la ecuación 7.5 la energía cinética resulta

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_A \quad (7.18)$$

o, utilizando la relación $\mathbf{L}_A = \bar{\bar{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega}$,

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (7.19)$$

Recordemos que las ecuaciones 7.18 y 7.19 son válidas sólo si A es el centro de masas o un punto fijo. Si A es el centro de masas,

$$E_c = \frac{1}{2}M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{CM} \quad (A \equiv CM) \quad (7.20)$$

El primer sumando representa la *energía cinética de traslación* del CM del sólido y el segundo la *energía cinética de rotación* alrededor del CM del mismo. Cuando A es un punto Q en reposo respecto de S , entonces $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ y la energía cinética se reduce a

$$E_c = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_Q \quad (A \equiv Q \text{ en reposo en } S), \quad (7.21)$$

es decir, no hay energía de traslación de Q sino exclusivamente de rotación alrededor del pivote o punto fijo.

Ecuación de la energía en S

Siguiendo lo aprendido para dinámica de una partícula, se podría pensar que para deducir la ecuación de la energía basta con multiplicar la ecuación 7.1 por \mathbf{V}_{cm} e integrar entre dos estados a y b

$$\frac{1}{2}M V_{CM}^2 \Big|_a^b = \int_a^b \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm} \quad (7.22)$$

la cual muestra que el incremento de energía cinética del centro de masas es igual al trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Sin embargo, a la vista de la ecuación 7.18, la energía cinética que aparece en el lado izquierdo de la ecuación 7.22 no es igual a la energía cinética del sólido, ya que falta la energía de rotación.

Para deducir la ecuación de la energía la operación correcta es multiplicar escalarmente la ecuación de cantidad de movimiento 7.1 por \mathbf{V}_{cm} y sumarle la ecuación de momento cinético 7.2 multiplicada escalarmente por $\boldsymbol{\omega}$:

$$M\mathbf{V}_{cm} \cdot \frac{d\mathbf{V}_{cm}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{F}_T + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_A \quad (7.23)$$

El segundo término de la izquierda se escribe como

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_S = \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_A \right] = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \right) \quad (7.24)$$

en donde hemos tenido en cuenta que $\mathbf{L}_A = \bar{\bar{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega}$ y que la derivada temporal de $\bar{\bar{I}}_A$ en S' es nula. Utilizando este resultado en la ecuación 7.23 e integrando entre dos estados a y b , obtenemos la ecuación de la energía para un sólido rígido

$$\left[\frac{1}{2}M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \right]_a^b = \int_a^b \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm} + \int_a^b \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_A dt \quad (7.25)$$

Ahora examinamos las dos posibles elecciones para el punto A :

- Si $A \equiv Q$ fijo ($\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$), la ec. 7.25 menos la ecuación 7.22 da

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{I}}_Q \cdot \boldsymbol{\omega} \right]_a^b = \int_a^{t_b} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_Q dt, \quad (7.26)$$

en donde se ha tenido en cuenta la ecuación 7.21. Vemos que el cambio de la energía cinética se debe exclusivamente al trabajo del momento de las fuerzas aplicadas al sólido \mathbf{M}_Q respecto del punto Q .

- Si $A \equiv CM$ tenemos

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{I}}_{CM} \cdot \boldsymbol{\omega} \right]_a^b = \int_a^b \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{cm} + \int_a^b \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{CM} dt \quad (7.27)$$

El primer sumando corresponde al trabajo de la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo \mathbf{F}_T y el segundo al trabajo efectuado por el momento \mathbf{M}_{CM} del sistema de fuerzas aplicadas al cuerpo calculado *respecto del CM*.

La demostración que se ha llevado a cabo muestra claramente que la ecuación de la energía es consecuencia de las ecuaciones 7.1 y 7.2. Por lo tanto no añade información adicional con respecto a éstas. Una deducción alternativa de la ecuación de la energía es proceder de forma análoga al capítulo de *sistema de partículas*, multiplicar cada una de las ecuaciones 5.1 por \mathbf{v}_α y sumar para todas las partículas:

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha v_\alpha^2 \right] = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha. \quad (7.28)$$

Vemos una vez más que la variación de energía cinética del sistema es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas sobre las partículas.

7.4. Movimiento plano

El *movimiento plano* de un sólido rígido es un caso particular del movimiento general de un sólido en el espacio. Definimos el *movimiento plano* de un sólido como aquel que cumple dos condiciones: (i) en todo instante de tiempo la dirección de la velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\omega}$ se mantiene paralela a una dirección fija y (ii) $\mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \forall \alpha = 1, \dots, n \Leftrightarrow \mathbf{V}_{cm} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

La implicación directa es por definición de centro de masas. La recíproca se sigue del campo de velocidades del sólido rígido:

$$\forall \alpha = 1, \dots, n, \quad \mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}_{cm} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{CM\alpha}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + \mathbf{0}.$$

En un movimiento plano, las trayectorias de todos los puntos del sólido son curvas contenidas en planos paralelos entre sí y perpendiculares a $\boldsymbol{\omega}$. Todos los movimientos bidimensionales son movimientos planos, pero hay movimientos planos que tienen lugar en tres dimensiones, como el del problema que ilustra esta sección.

Un sólido que realiza un movimiento plano tiene en general 3 grados de libertad. Por ejemplo se pueden usar dos grados de libertad para situar la posición del centro de masas, (X_{cm}, Y_{cm}) ,

en el plano que contiene su movimiento; además, en dicho plano se toma una dirección ligada al sólido y el ángulo θ que forma dicha dirección con una dirección fija de dicho plano es el tercer grado de libertad que sirve para orientar al sólido. Es conveniente introducir unos ejes S ($OXYZ$) fijos en los que $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ y unos ejes S' ligados al sólido, con origen en su centro de masas y eje \mathbf{k}' paralelo a \mathbf{k} . Las tres ecuaciones que proporcionan la evolución en el tiempo de X_{cm} , Y_{cm} y θ son

$$M \frac{dV_{cmx}}{dt} = F_{Tx} \quad (7.29)$$

$$M \frac{dV_{cmy}}{dt} = F_{Ty} \quad (7.30)$$

$$I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} = M_{CMz'} \quad (7.31)$$

en donde $I_{z'z'}$ es el momento de inercia del sólido con respecto al eje \mathbf{k}' y $M_{CMz'}$ es la componente según \mathbf{k}' del momento de las fuerzas exteriores con respecto al centro de masas. Por lo tanto, conocidas las fuerzas exteriores podríamos determinar la dinámica integrando el sistema 7.29-7.31.

En ocasiones, el sólido realiza un movimiento plano porque existen elementos mecánicos que lo imponen. Por ejemplo, en la figura 7.3 se muestra un sólido que gira alrededor de un eje que no pasa por su centro de masas. En los apoyos del eje en el suelo y en el techo aparecen fuerzas de reacción (nombradas con la letra \mathbf{R} en el dibujo) y que deben calcularse como parte de la solución. Es decir, en los miembros de la derecha de las ecuaciones 7.29-7.31 hay que incluir las componentes R_x , R_y en F_{Tx} y F_{Ty} respectivamente, y la componente según \mathbf{k} del momento de la reacción \mathbf{R} respecto al centro de masas en $M_{CMz'}$.

Para cerrar el problema es necesario añadir el resto de las ecuaciones de cantidad de movimiento y momento cinético. Estas últimas hay que escribirlas con cuidado ya que en general la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ no coincide con una dirección principal de inercia con respecto al centro de masas y los productos de inercia respecto del sistema S' serán no nulos. El producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_{CM}$ es

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_{CM} = \omega_{z'}^2 I_{x'z'} \mathbf{j}' - \omega_{z'}^2 I_{y'z'} \mathbf{i}$$

y tendremos

$$0 = F_{Tz} \quad (7.33)$$

$$I_{x'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} - \omega_{z'}^2 I_{y'z'} = M_{CMx'} \quad (7.34)$$

$$I_{y'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + \omega_{z'}^2 I_{x'z'} = M_{CMy'} \quad (7.35)$$

El sistema de ecuaciones 7.29-7.35 proporciona la trayectoria del centro de masas, la velocidad angular del sólido y las reacciones \mathbf{R} . Sin embargo, como hemos visto en varios ejemplos,

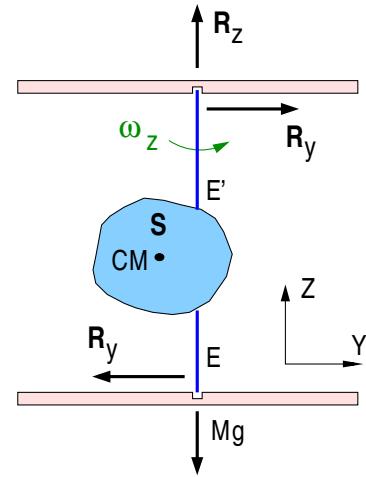


Figura 7.3: El sólido rota sin rozamiento alrededor del eje Z paralelo a EE' (7.32)

en ocasiones es muy útil plantear la ecuación de la energía. Para el centro de masas del sistema encontramos

$$\left[\frac{M (V_{CMx}^2 + V_{CMy}^2)}{2} + \frac{I_{z'z'} \dot{\theta}^2}{2} \right]_a^b = \int_a^b \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} + \int_a^b M_{CMz'} d\theta \quad (7.36)$$

y para un punto Q del eje EE' ($\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$)

$$\left[\frac{1}{2} \tilde{I}_{z'z'} \dot{\theta}^2 \right]_a^b = \int_a^b M_{Qz'} d\theta \quad (7.37)$$

en donde $\tilde{I}_{z'z'}$ es el momento de inercia del sólido respecto al eje EE' (pasa por Q y es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$). Conviene recordar que los momentos de inercia $I_{z'z'}$ y $\tilde{I}_{z'z'}$ están relacionados por el Teorema de Steiner $\tilde{I}_{z'z'} = I_{z'z'} + MD^2$ con M la masa del sólido y D la distancia del centro de masas al eje EE' .

Rodadura plana

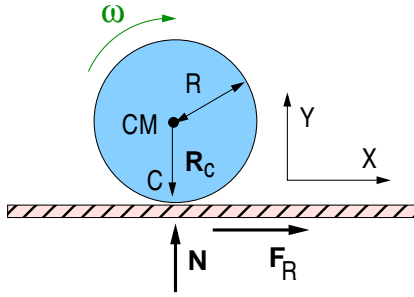


Figura 7.4: Rodadura plana.

Un ejemplo importante de movimiento plano es el de un sólido de sección circular de radio R sobre una superficie plana, como se muestra en la Fig. 7.4. El sistema tiene dos grados de libertad, por ejemplo la distancia X_{CM} del centro de masas del sistema al eje OY del sistema S (ligado al suelo) y el ángulo θ que forma una dirección fija al disco con el eje OY . Con esta elección, la velocidad del centro de masas es $\mathbf{V}_{cm} = \dot{X}_{cm} \mathbf{i}$ y su velocidad angular (ver figura 7.4) $\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{k}$ ($\dot{\theta} = \omega$).

El disco está sometido a tres fuerzas: la normal del suelo $\mathbf{N} = N \mathbf{j}$, la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_R = F_R \mathbf{i}$ y su

$$M \frac{dV_{CMx}}{dt} = F_R \quad (7.38)$$

$$0 = N - mg \quad (7.39)$$

$$I_{z'z'} \frac{d\omega}{dt} = -R F_R \quad (7.40)$$

Tenemos por tanto 4 incógnitas $V_{CMx}(t)$, $\omega(t)$, N y $F_R(t)$ y únicamente 3 ecuaciones. Para encontrar la cuarta ecuación que necesitamos, escribimos la velocidad y la aceleración del punto de contacto C del disco:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}_c = (V_{cmx} - \omega R) \mathbf{i} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_{cm} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}_c) \mathbf{a}_c = (\dot{V}_{cmx} - \dot{\omega} R) \mathbf{i} + \omega^2 R \mathbf{j} \quad (7.42)$$

En función de como sea el movimiento del disco distinguimos dos regímenes:

1. Si $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$, el disco *rueda* y tenemos entonces la relación

$$V_{CMx} - \omega R = 0 \tag{7.43}$$

Es importante señalar que $\mathbf{a}_c \neq \mathbf{0}$ aunque exista rodadura en un intervalo de tiempo y que en este caso la fuerza de rozamiento no realiza trabajo.

2. Si $\mathbf{v}_c \neq \mathbf{0}$, el disco *desliza* y entonces la fuerza de rozamiento es opuesta a \mathbf{v}_c y de módulo μN

$$|\mathbf{F}_R| = \mu N \tag{7.44}$$

Aunque exista deslizamiento, en general $\omega \neq 0$. La fuerza de rozamiento realiza una potencia negativa $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v}_c < 0$.

Para estudiar el movimiento a partir de un instante, suponemos que hay rodadura y resolvemos el sistema de ecuaciones 7.38-7.40 junto con la ecuación 7.43. Si resulta $|\mathbf{F}_R| < \mu N$ entonces nuestra hipótesis inicial es correcta. En caso contrario, existe deslizamiento y hay que resolver el sistema 7.38-7.40 junto con la ecuación 7.44 y teniendo la precaución de tomar la fuerza de rozamiento con sentido contrario a \mathbf{v}_c .

Ejemplo : Vamos a analizar el movimiento del disco de la figura 7.5 de masa M que parte en el instante inicial $t = 0$ con velocidad $\mathbf{V}_C = V_o \mathbf{i}$ y velocidad angular $\omega = \omega_o \mathbf{k}$. Para el punto Q tendremos,

$$\mathbf{V}_Q = (V_o + \omega_o R) \mathbf{i}$$

de modo que $V_o + \omega_o R \neq 0$ y el disco inicialmente desliza. La Ec. 5.7 para el movimiento del CM será,

$$\begin{aligned} M \frac{dV_{cx}}{dt} &= -F_R \\ M \frac{dV_{cy}}{dt} &= 0 = N - M g \\ F_R &= \mu N \end{aligned}$$

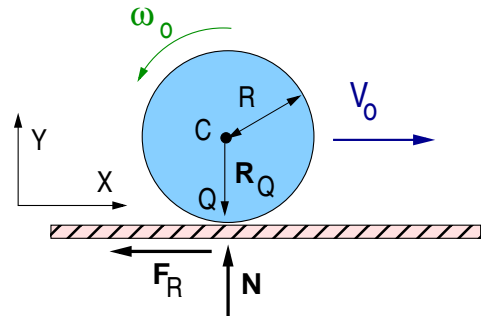


Figura 7.5: El disco desliza en el instante inicial.

Inicialmente $v_Q \neq 0$ y el punto Q al rozar con el suelo le hace perder energía cinética al disco y para la rotación (Ec. 7.40) tendremos

$$I_{z'z'} \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{F}_R = -R F_R \mathbf{k}$$

y puesto que las fuerzas son constantes en el tiempo podemos integrar las ecuaciones:

$$V_{cx} = V_o - \mu g t \quad \text{y} \quad \omega = \omega_o - \frac{2\mu g}{R} t.$$

La velocidad $V_{cx}(t)$ del centro del disco y su velocidad angular disminuyen en el tiempo a partir de su valor inicial por lo que en algún instante t_c se ha de tener que $V_c + \omega R = 0$ y el disco ha de pasar de deslizar a rodar. Substituyendo los valores anteriores encontramos que:

$$t_c = \frac{V_o + \omega_o R}{3\mu g}.$$

A partir de este momento la ecuación para el rozamiento $F_R = \mu N$ deja de ser válida y ha de reemplazarse por la condición de rodadura $\mathbf{V}_Q = \mathbf{0}$. El movimiento del disco para $t > t_c$ tiene como condiciones iniciales las velocidad angular ω_c y del CM del disco V_c en el instante t_c cuando se inicia el nuevo movimiento,

$$V_c = \frac{2V_o - \omega_o R}{3} \quad \text{y,} \quad \omega_c = -\frac{2V_o - \omega_o R}{3R} = -\frac{V_c}{R}$$

Si en $t = 0$ se tiene $V_o > \omega_o R/2$ la velocidad inicial del CM del disco en $t = t_c$ es $V_c > 0$ y se moverá en el sentido positivo del eje X . Ha de cambiar entonces el sentido de la velocidad angular y $\omega_c < 0$ por lo que el disco rotará en sentido contrario al que se indica en la Fig. 7.5. Si por el contrario $V_o < \omega_o R/2$ se mantendrá en $t = t_c$ el sentido inicial de ω pero se invierte el de la velocidad del CM, $V_c < 0$ por lo que el disco vuelve rodando.

7.5. Estática

Si en un instante un sólido tiene $\mathbf{V}_{cm} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, y en la posición en la que se encuentra en ese instante se cumple

$$\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = \mathbf{0} \quad \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_Q) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = \mathbf{0},$$

es decir, el conjunto de fuerzas como sistema de vectores deslizantes tiene resultante y momento nulo respecto de algún punto Q , entonces $\mathbf{V}_{cm} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ par todo instante de tiempo posterior. Se dice entonces que el sólido se encuentra en equilibrio.

El equilibrio se dice *estable* cuando el sólido tiende a volver a su posición de equilibrio cuando se le aparta un poco de él, e *inestable* en caso contrario. Por ejemplo un taburete que se inclina un poco vuelve a caer hacia su posición de equilibrio, por lo que se dice que su equilibrio es estable.

Sucede con frecuencia que al plantear las ecuaciones de equilibrio de un sólido rígido con objeto de hallar las fuerzas de reacción, el sistema de ecuaciones resulta indeterminado (ya que hay más incógnitas que ecuaciones), con lo que hay infinitas fuerzas de reacción que satisfacen las ecuaciones. Dichos problemas se llaman *hiperestáticos*. Tal es el caso de una silla de cuatro patas, aunque no de un taburete de tres. En la realidad las fuerzas de reacción están determinadas, pero para hallarlas el modelo de sólido rígido no es suficiente. Hay que tener en cuenta que los sólidos son elásticos y se deforman, y conocer qué relación hay entre las deformaciones y las fuerzas aplicadas en los materiales de los sólidos que intervienen en el problema.

8.1. El oscilador armónico simple

Vamos a estudiar el movimiento sin rozamiento en una dimensión de un bloque de masa m unido a una pared por un muelle como el de la Fig. 4.4. Como vimos en la página 36 la fuerza que ejerce viene dada por la ley de Hooke $F_m = -K(x - L_o)$ de modo que su ecuación del movimiento es,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + K(x - L_o) = 0$$

y las soluciones de esta ecuación diferencial se obtienen haciendo primero el cambio de variable $s(t) = x(t) - L_o$ de modo que $\ddot{s}(t) = \ddot{x}(t)$,

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + Ks = 0. \tag{8.1}$$

Puede comprobarse que las soluciones de esta ecuación (oscilador armónico) son de la forma,

$$s(t) = A \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$$

y deshaciendo el cambio de variable,

$$x(t) = L_o + A \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$$

donde $\omega_o = \sqrt{K/m} = 2\pi/T_o$ es la *frecuencia* y T_o el *periodo* del movimiento oscilatorio que tiene lugar entre $x_{max} = L_o + A$ y $x_{min} = L_o - A$ como se indica en la Fig. 8.1.

Si calculamos $\dot{x}(t) = \omega_o A \cos(\omega_o t + \varphi)$ y particularizamos las funciones en el instante $t = 0$ siendo $x(0) = x_o$ y $\dot{x}(0) = v_o$,

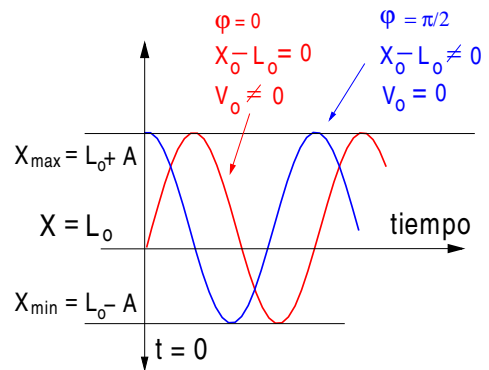
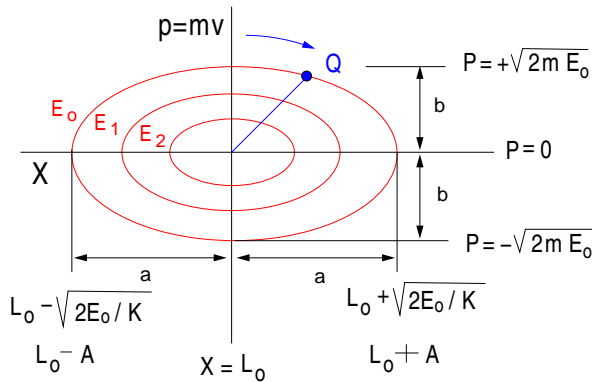


Figura 8.1: Movimiento oscilatorio para dos condiciones iniciales diferentes.

$$x_o = L_o + A \operatorname{sen}(\varphi) \quad v_o = \omega_o A \cos(\varphi) \quad (8.2)$$

vemos que la *amplitud* A y la *fase* φ vienen determinadas por la velocidad v_o y posición x_o iniciales del movimiento ¹.

En la Fig. 8.1 se ha representado las soluciones para dos situaciones diferentes. Cuando en el instante inicial $t_o = 0$ alejamos el oscilador de su posición de equilibrio tendremos $x_o - L_o \neq 0$ y si en este punto parte del reposo ($v_o = 0$) en las ecuaciones 8.2 resultará $\varphi = \pi/2$ y $A = x_o - L_o$. La solución en este caso es la función,



$$x(t) - L_o = (x_o - L_o) \cos(\omega_o t)$$

y como se ve en la Fig. 8.1 parte en $t = 0$ con pendiente (velocidad) nula $\dot{x}(0) = v_o$.

En cambio, si se encuentra en la distancia de equilibrio del oscilador $x_o = L_o$ y le comunicamos una velocidad inicial $v_o \neq 0$ obtendremos $\varphi = 0$, $A = v_o/\omega_o$ y entonces,

Figura 8.2: Elipses de energía constante recorridas por la recta OQ en el sentido indicado.

$$x(t) = L_o + (v_o/\omega_o) \operatorname{sen}(\omega_o t)$$

El movimiento parte entonces del punto de equilibrio $x_o = L_o$ con pendiente inicial (velocidad) no nula. Para el caso más general obtenemos a partir de 8.2,

$$A^2 = (x_o - L_o)^2 + \frac{v_o^2}{\omega_o^2} \quad \tan(\varphi) = (x_o - L_o) \frac{\omega_o}{v_o} \quad (8.3)$$

que permiten determinar A y φ a partir de dos condiciones iniciales (x_o, v_o) cualesquiera.

Como vemos, para alejar la masa m de su estado de equilibrio hay que comunicarle una energía inicial E_o , bien en forma de energía potencial elástica ($x_o \neq L_o, v_o = 0$), bien aportando una energía cinética inicial ($x_o = L_o, v_o \neq 0$) o una combinación de ambas.

No obstante, el movimiento siempre será oscilatorio con periodo $T_o = 2\pi/\omega_o$ y para una velocidad y posición inicial cualesquiera (x_o, v_o) su energía inicial será,

$$E_o = \frac{m v_o^2}{2} + \frac{K}{2} (x_o - L_o)^2 \quad (8.4)$$

y puesto que no existe rozamiento es constante en todo instante,

$$E(t) = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{K}{2} (x(t) - L_o)^2 = E_o$$

¹Como ya hemos visto en las págs. 31 y 104 para determinar las constantes A y φ necesitamos conocer la posición y velocidad en un instante cualquiera $t = t_o$ pero tomamos aquí $t = 0$ para simplificar.

donde $p(t) = m v(t)$ es la cantidad de movimiento. Mediante un cambio de variable esta última ecuación resulta ser la de una elipse en el plano (x, p) ² como muestra la Fig. 8.2,

$$\frac{p^2}{2mE_o} + \frac{(x - L_o)^2}{2E_o/K} = 1$$

donde comparando con la Ec. 9.8 se encuentran las siguientes relaciones entre los parámetros de la elipse y los del movimiento oscilatorio,

$$\begin{aligned} p^2 &\rightarrow (y - y_o)^2 & b^2 &\rightarrow 2mE_o \\ (x - L_o)^2 &\rightarrow (x - x_o)^2 & a^2 &\rightarrow 2E_o/K \end{aligned}$$

Fijada la energía E_o todas las posiciones $x(t)$ y velocidades $v(t)$ que son solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico 8.1 han de encontrarse a lo largo de la elipse que representa la curva de energía $E = E_o$ constante de la Fig. 8.2. Como vemos el valor de la energía inicial $E_o = E(t)$ determina el tamaño de la elipse que disminuye para energías menores $E_2 < E_1 < E_o$.

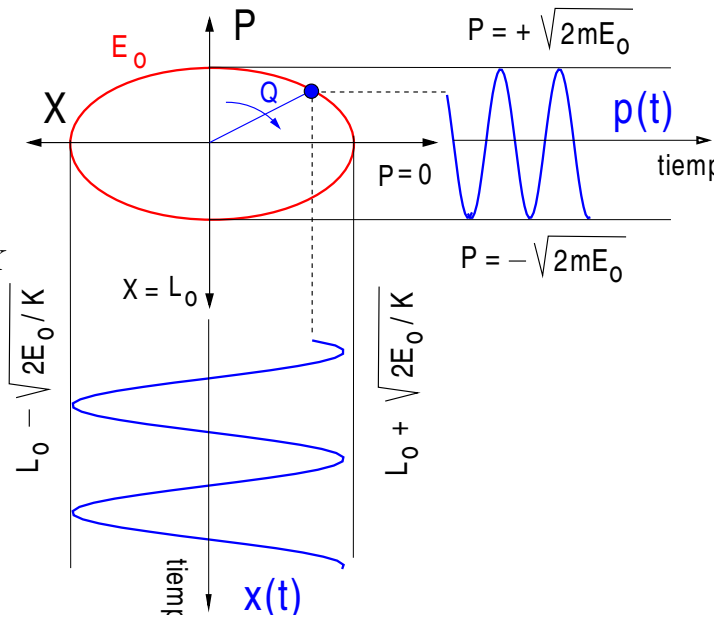


Figura 8.3: Posición $x(t)$ y cantidad de movimiento $p(t)$ para el movimiento oscilatorio a lo largo de la elipse de energía constante E_o .

Podemos concebir el movimiento del oscilador armónico como el de un punto Q que recorre dicha curva en el curso del tiempo como se indica en la Fig. 8.3. Partiendo de un punto inicial determinado por las condiciones iniciales (x_o, p_o) que fijan la energía E_o el punto Q recorre la elipse con un período constante T_o . Como muestra la Fig. 8.2 el tiempo que tarda la recta OQ en recorrer las elipses de energía constante $E_o > E_1 > E_2$ es siempre el mismo. Esto es debido a que el período del movimiento $T_o = 2\pi\sqrt{m/K}$ que no depende de la energía inicial sino del valor de la constante elástica K y la masa m .

Como se observa en la Fig. 8.3, las proyecciones de la posición de Q sobre cada eje $(x(t), p(t))$ representan las posiciones y la cantidad de movimiento en cada instante. Todos los puntos (x_o, p_o) situados sobre la elipse con E_o constante dan lugar al mismo movimiento oscilatorio pero con diferentes condiciones iniciales, es decir, con diferentes *fases* determinadas por las Ecs. 8.3.

Finalmente, podemos calcular el *promedio temporal* de la energía potencial y cinética que resultan ser iguales en un semiperíodo,

$$\frac{1}{(T_o/2)} \int_{t_o}^{t_o+(T_o/2)} \frac{m v^2}{2} dt = \frac{1}{(T_o/2)} \int_{t_o}^{t_o+(T_o/2)} U dt = \frac{m}{4} \omega_o^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{p,max}$$

²Las propiedades de la elipse pueden consultarse en la pág. 108.

8.2. El péndulo simple

Las oscilaciones de pequeña amplitud de una masa que cuelga de un punto (péndulo simple) como el de la Fig. 8.4 son análogas al movimiento de un oscilador armónico. Podemos emplear las relaciones que encontramos para el movimiento circular (pág. 20) puesto que la trayectoria del punto P de masa m es una circunferencia de centro O y cuyo radio es la longitud L del hilo. La posición $\mathbf{r}(t)$, velocidad $\mathbf{v}(t)$ y aceleración $\mathbf{a}(t)$ de P son,

$$\mathbf{r}(t) = L \mathbf{u}_r \quad \mathbf{v}(t) = L \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{a}(t) = L \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - L \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r$$

La tensión del hilo es $\mathbf{T} = -T(\theta) \mathbf{u}_r$ y el peso $\mathbf{P} = mg \mathbf{i}$ que expresaremos en sus componentes (ver la Fig. 8.4) a lo largo del hilo (paralela a \mathbf{u}_r) y perpendicular (paralela a \mathbf{u}_θ) mediante la transformación,

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} m L \ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \\ m L \dot{\theta}^2 &= T(\theta) - mg \cos \theta \end{aligned} \quad (8.5)$$

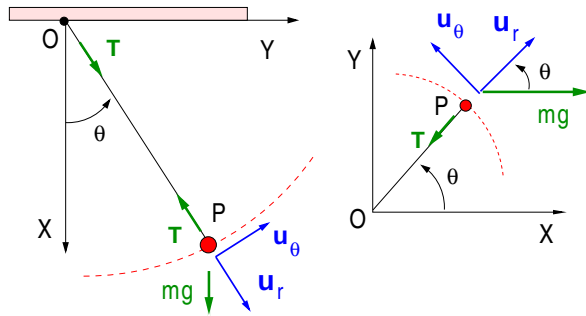


Figura 8.4: El péndulo simple con el sistema de coordenadas empleado.

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones diferenciales son la amplitud de oscilación $\theta(t)$ en radianes y $T(\theta)$ que es función implícita del tiempo y representa el valor de la tensión del hilo.

Encontrar una solución general del sistema 8.5 es difícil salvo que efectuemos la aproximación de *oscilaciones pequeñas*. Si la máxima amplitud $L \theta_m$ que alcanza P durante su movimiento es pequeña frente a la longitud del hilo $L \gg L \theta_m$ de modo que todos los ángulos $\theta(t)$ sean pequeños $\theta_m \ll 1$. Podemos entonces desarrollar en serie de potencias³

las funciones trigonométricas en 8.5,

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \simeq \theta \quad \cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Despreciando los términos del desarrollo en serie con potencias superiores a θ^3 por ser muy pequeños, el sistema de ecuaciones se simplifica,

$$\begin{aligned} m L \ddot{\theta} &= -mg \theta \\ m L \dot{\theta}^2 &= T(\theta) - mg \cos \theta \end{aligned}$$

La primera ecuación para $\ddot{\theta}(t)$ del sistema anterior es análoga a la del oscilador armónico,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

³Sobre los desarrollos de funciones en serie de potencias de una función puede consultarse la pág. 106

con $\omega_o = \sqrt{g/L}$ con período de oscilación $T_o = 2\pi\sqrt{L/g}$. Su solución es lo mismo que antes $\theta(t) = \theta_m \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$ donde la amplitud θ_m y la fase φ han de determinarse a partir de las condiciones iniciales del movimiento mediante las Ecs.8.3. Introduciendo la aproximación para el coseno en la segunda ecuación obtenemos para la tensión,

$$T(\theta) \simeq mL\dot{\theta}^2 + mg \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

que depende de la solución $\theta(t)$ de la primera ecuación. Para simplificar definimos la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$ y sustituimos,

$$T(\phi) = mg + mL\omega_o^2 \theta_m^2 \cos^2(\phi) - \frac{mg}{2} \theta_m^2 \text{sen}^2(\phi)$$

$$\frac{T(\phi)}{mg} = \left(1 - \frac{\theta_m^2}{2}\right) + \frac{3\theta_m^2}{2} \cos^2(\phi)$$

y finalmente,

$$\frac{T(\phi)}{mg} = \left[\left(1 + \frac{\theta_m^2}{4}\right) + \frac{3\theta_m^2}{4} \cos(2\phi) \right]$$

Hay que subrayar que la tensión es siempre positiva $T(t) > 0$ y que, puesto que el movimiento del péndulo es simétrico respecto de la vertical, su frecuencia será $2\omega_o$, el doble que la de $\theta(t)$ y su período la mitad.

Este hecho puede observarse en la Fig. 8.5 donde se han representado en función de la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$ para $\theta_m = 1$ los valores de las amplitudes $\theta(t) = \text{sen}(\phi)$ y del cociente $T(\phi)/mg$, proporcional a la tensión. Como puede observarse la tensión es siempre positiva mientras que la amplitud cambia de signo y su período de oscilación es el doble.

En la Fig. 8.5 el valor de $T(t)$ es máximo cuando el péndulo pasa por la vertical $\theta = 0$ y alcanza un valor mínimo para $\pm\theta_m$. Es decir, el mínimo valor de la tensión se alcanza dos veces en cada período de oscilación.

La tensión \mathbf{T} no hace trabajo puesto que \mathbf{T} y $d\mathbf{r}$ son perpendiculares, luego $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en la Ec. 4.20 y en consecuencia $\Delta E_c = -\Delta E_p$. Si calculamos la energía potencial respecto de la posición mas baja de P para un valor genérico del ángulo θ ,

$$E_p = mgh = mgL(1 - \cos \theta)$$

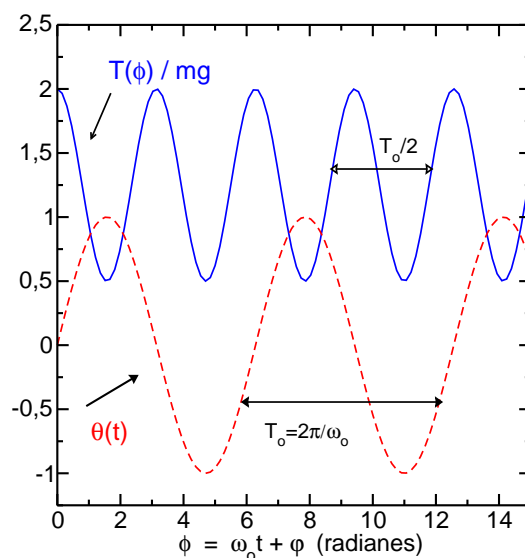


Figura 8.5: Tensión $T(\phi)$ y amplitud $\theta(\phi)$ del péndulo en función de la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$.

y su energía total será constante y de valor,

$$E = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

Finalmente, si en esta ecuación introducimos el desarrollo en serie para el coseno despreciando las potencias iguales o superiores a θ^3 tendremos,

$$E \simeq \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} g L \theta^2 = \frac{m}{2} v^2 + m \frac{g}{2L} (L\theta)^2$$

luego,

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{K^2}{2} x^2$$

donde $x = L\theta$ es el espacio que recorre la partícula y $v = dx/dt = L\dot{\theta}$ su velocidad. Recuperamos la expresión (Ec. 8.4) para la energía de un oscilador armónico de masa m , constante $K = m\omega_o^2 = mg/L$ y longitud natural L_o nula.

8.3. El péndulo físico

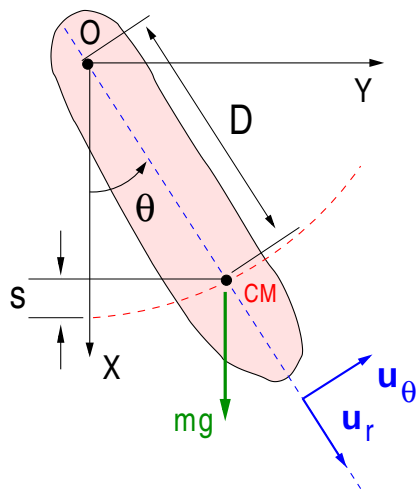


Figura 8.6: El péndulo físico.

El péndulo físico es un sólido rígido que oscila sin rozamiento bajo la acción de la gravedad alrededor de un eje fijo. Este movimiento es un ejemplo de *movimiento plano* de un sólido (ver Pág. 88) en el que el centro de masas describe una trayectoria circular alrededor del punto O como se indica en la Fig. 8.6.

Considerando el momento de inercia I_E del sólido respecto de un eje E perpendicular al plano del movimiento que pasa por el punto O , el análisis es semejante al del péndulo simple (comparese la Fig. 8.6 con la Fig. 8.4). Para el momento respecto de O tendremos,

$$M_O = D \mathbf{u}_r \wedge mg \mathbf{i} = -mgD \sin \theta \mathbf{k}$$

y empleando la Ec. ?? se tiene,

$$I_E \frac{d\omega}{dt} = -mgD \sin \theta$$

como $\omega = d\theta/dt$ obtenemos la ecuación diferencial,

$$I_E \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgD \sin \theta = 0 \quad (8.6)$$

siendo D la distancia del CM al punto de suspensión O . Podemos de nuevo hacer la aproximación de *oscilaciones pequeñas* $\sin \theta \simeq \theta$ de modo que recuperamos la ecuación 8.1 del oscilador armónico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgD}{I_E}\right) \theta = 0$$

con frecuencia propia $\omega_o = \sqrt{mgD/I_E}$ y cuya solución general es de nuevo de la forma $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_o t + \varphi)$.

Como se observa en la Fig. 8.6 la altura s del centro de masas correspondiente al ángulo θ respecto del punto $x = D$ es $s = D(1 - \cos \theta)$. Si calculamos la energía potencial,

$$E_p(s) = mgs = mgD(1 - \cos \theta)$$

respecto del punto de equilibrio estable $x = D$, para el movimiento entre dos instantes de tiempo t_a y t_b tendremos,

$$\Delta E_p = mg \Delta s = mgD(\cos \theta_b - \cos \theta_a)$$

donde θ_a y θ_b son los ángulos inicial y final del movimiento. La variación de la energía cinética $\Delta E = -\Delta E_p$ se encuentra empleando la Ec. 7.20 para el centro de masas,

$$\frac{m}{2}(V_b^2 - V_a^2) + \frac{I_{CM}}{2}(\omega_b^2 - \omega_a^2) = -mg \Delta s$$

y la energía del péndulo para un ángulo genérico será,

$$E(\theta) = \frac{mV_{CM}^2}{2} + \frac{I_{CM}}{2}\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta)$$

que es una cantidad conservada por no existir rozamiento. Si como se indica en la Fig. 8.6 D es la distancia del punto O al CM su velocidad será $\mathbf{V}_{CM} = (\omega D) \mathbf{u}_\theta$ y tendremos,

$$E(\theta) = \frac{1}{2}(I_{CM} + mD^2)\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta) = \frac{I_E}{2}\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta) \quad (8.7)$$

donde la cantidad entre paréntesis resulta ser el momento de inercia $I_E = I_{CM} + mD^2$ respecto del eje E que pasa por O . Recuperamos la expresión para $E(\theta)$ que encontraríamos empleando la Ec. 7.21, es decir, tomando $O \equiv Q$ un punto fijo del movimiento.

Si derivamos respecto del tiempo la ecuación para $E(\theta)$ recuperamos asimismo la ecuación 8.6 anterior para el movimiento del péndulo compuesto. También podemos calcular la variación de la de la energía cinética ΔE_c mediante la Ec. ??,

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \int_{\theta_a}^{\theta_b} (-mgD \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} dt = mgD(\cos \theta_b - \cos \theta_a) = -mg \Delta s$$

que es justamente igual al valor de $-\Delta E_p$ que hemos encontrado antes.

8.4. El oscilador armónico amortiguado

Como hemos visto, (pág. 95) la energía inicial del oscilador E_o es fijada por las condiciones iniciales (x_o, p_o) que –si no existe rozamiento– determina la elipse de energía constante $E(t) = E_o$ en el plano (x, p) como en la Fig. 8.2.

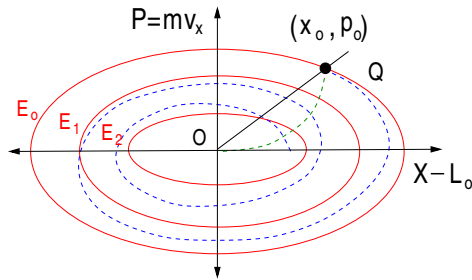


Figura 8.7: Dos posibles movimientos (líneas discontinuas) del oscilador armónico con rozamiento.

y su trayectoria en el plano (x, p) debe terminar en $x = L_o$ donde $p = 0$ que corresponde a los puntos de reposo.

En la Fig. 8.7 se muestran dos posibles casos partiendo de la elipse correspondiente a la energía inicial E_o . Si la pérdida de energía por rozamiento es rápida el bloque puede detenerse sin oscilar (curva de trazo continuo). En cambio, si la magnitud de la fuerza de rozamiento es comparable a la que ejerce el muelle puede trazar curvas alrededor del eje x ($p = 0$) (curva de trazo discontinuo) que corresponden a oscilaciones de amplitud decreciente. En todos los casos las amplitudes y velocidades máximas que alcanza en cada período la masa m disminuyen a medida que se acerca a un estado de equilibrio donde $p = 0$.

Si la fuerza de fricción es $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$ (ec. 4.10) la ecuación de movimiento resulta ser,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + K(x - L_o) = 0$$

donde con el cambio de variable, $x = s - L_o$ obtenemos la ecuación del *oscilador armónico amortiguado*,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0$$

Dependiendo del valor de $\omega_o = \sqrt{K/m}$ y del *coeficiente de amortiguamiento* $\beta = \gamma/2m$ nos encontramos con tres posibilidades que se encuentran representadas en función del tiempo en la Fig. 8.8.

Si $\omega_o^2 < \beta^2$ se dice que es un oscilador *sobreamortiguado*, el rozamiento domina y no hay oscilaciones (caso de la curva a trazos mas corta en la Fig. 8.7). El *amortiguamiento crítico* tiene lugar cuando $\omega_o^2 = \beta^2$ y puede probarse que la solución en este caso es de la forma,

$$s(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$$

en donde de nuevo las constantes se fijan mediante las condiciones iniciales.

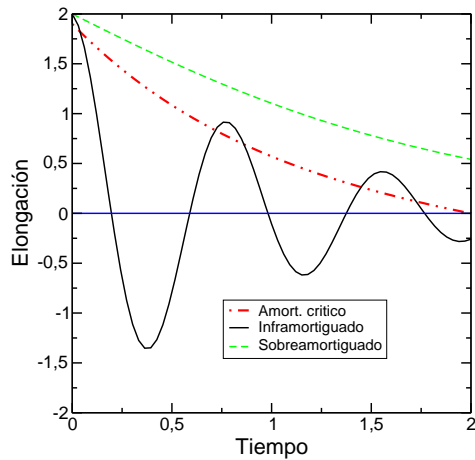


Figura 8.8: Ejemplos de movimientos del oscilador armónico amortiguado con $\dot{s}(0) = 0$.

En cambio para $\omega_o^2 > \beta^2$ el oscilador está *inframortiguado* y existen oscilaciones de amplitud decreciente en el tiempo (el caso de la curva a trazos más larga en la Fig. 8.7). La solución es,⁴

$$s(t) = A_o e^{-\beta t} \text{sen}(\Omega t + \varphi) \quad (8.8)$$

La frecuencia $\Omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2$ es menor que la frecuencia propia del oscilador ω_o y depende de γ , es decir, de la magnitud de la fuerza de fricción.

En este caso la fuerza de rozamiento compite con la que ejerce el muelle y la amplitud de la oscilación $A(t)$ decrece exponencialmente con el tiempo como se observa en la Fig. 8.8 (análoga a la curva a trazos de la Fig. 8.7). De nuevo, la amplitud A_o y la fase φ se determinan mediante las condiciones iniciales.

8.5. El oscilador armónico forzado

Si sobre la masa m del oscilador armónico amortiguado actúa además una fuerza periódica externa $F(t) = F_o \cos(\omega_f t)$ de frecuencia ω_f y amplitud F_o se dice que es un oscilador *forzado* y su ecuación del movimiento, con el cambio $s = x - L_o$ es,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{F_o}{m} \cos(\omega_f t). \quad (8.9)$$

Podemos comprobar que una función de la forma $s(t) = A \text{sen}(\omega_f t + \varphi)$ es una solución particular,⁵ de la ecuación para una cierta amplitud $A(\omega_f)$ y fase $\varphi(\omega_f)$ que son funciones de la frecuencia de la *forzante* $F(t)$. Dicha solución es válida para tiempos $t \gg \tau$ superiores al tiempo característico de un cierto transitorio $\tau \simeq 1/\beta$, si sustituimos $s(t)$ en 8.9 tendremos,

$$A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \text{sen}(\omega_f t + \varphi) + 2\beta\omega_f \cos(\omega_f t + \varphi) = \frac{F_o}{m} \cos(\omega_f t)$$

luego, desarrollando las funciones trigonométricas e igualando los coeficientes en $\text{sen}(\omega_f t)$ y $\cos(\omega_f t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \cos(\varphi) - 2A\beta\omega_f \text{sen}(\varphi) &= 0 \\ A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \text{sen}(\varphi) + 2A\beta\omega_f \cos(\varphi) &= F_o/m \end{aligned}$$

y estas dos ecuaciones pueden simplificarse aún,

⁴Puede comprobarse substituyendo en la ecuación diferencial y verificando que se anulan los coeficientes en $\text{sen}(\Omega t + \varphi)$ y $\cos(\Omega t + \varphi)$

⁵La solución general se estudiará en el próximo curso.

$$\begin{aligned} m A (\omega_o^2 - \omega_f^2) &= F_o \text{sen}(\varphi) \\ 2 m A \beta \omega_f &= F_o \text{cos}(\varphi) \end{aligned}$$

Si dividimos la primera por la segunda obtenemos una relación para la fase $\varphi(\omega_f)$,

$$\tan(\varphi) = \frac{(\omega_o^2 - \omega_f^2)}{2\beta\omega_f} \quad (8.10)$$

y otra para la amplitud $A(\omega_f)$,

$$A(\omega_f) = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}} \quad (8.11)$$

Para poder representar gráficamente estas funciones introducimos el cambio de variable $z = \omega_f/\omega_o$ y $q = \beta/\omega_o$ de modo que la Ec. 8.10 se convierte en,

$$\tan(\varphi) = \left(\frac{1}{2q}\right) \frac{1-z^2}{z} \quad (8.12)$$

y la amplitud $A(\omega_f) = A(z)$ en la ec. 8.11 es proporcional a $h(z) = m\omega_o^2 A(z)/F_o$ luego,

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4q^2 z^2}} \quad (8.13)$$

En la Fig. 8.9 se ha representado $h(z)$ como función del cociente $z = \omega_f/\omega_o$ para diferentes valores de $q = \beta/\omega_o$ que representa la razón entre el rozamiento ($\beta = \gamma/2m$) y la frecuencia propia del oscilador ($\omega_o = \sqrt{K/m}$). Podemos observar el crecimiento que experimenta la amplitud $A(\omega_f)$ cuando ω_f tiende a ω_o (es decir, entorno a $z = 1$) dicho crecimiento que se hace mayor a medida que $\omega_o > \beta$ (o equivalentemente, $1 \gg q$).

A este crecimiento de la amplitud para frecuencias ω_f de $F(t)$ próximas a la frecuencia propia del oscilador ω_o se le denomina *resonancia* y en el límite en el que el rozamiento es nulo ($\beta = 0$ o equivalentemente $q = 0$ en la Ec. 8.11) aparece un crecimiento indefinido de la amplitud.

En la resonancia la amplitud del movimiento crece porque la transferencia de energía de la fuerza aplicada a la partícula es óptima ⁶. En casi todos los sistemas físicos reales existe un mínimo rozamiento (en la práctica siempre $\beta \neq 0$ aunque tome un valor muy pequeño) que hace que el crecimiento de la amplitud del movimiento tenga un límite superior como se muestra en la Fig. 8.9.

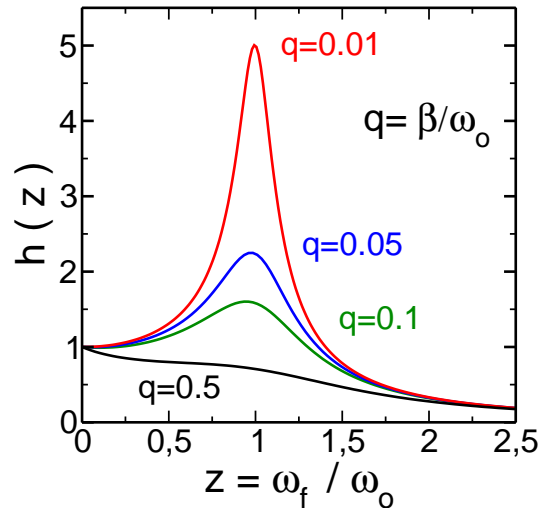


Figura 8.9: Crecimiento de la amplitud $A(\omega_f)$ para valores de $\omega_f \approx \omega_o$.

⁶Par una mayor información puede consultarse la sección 12.13, pags. 389-393 del Vol I de la Ref. [1]

9.1. Sistemas coordenados

Aunque siempre necesitaremos tres números para determinar la posición de un punto P en el espacio, suele ser conveniente especificar ésta empleando diferentes *sistemas coordenados*. La razón es que suelen encontrarse ecuaciones más sencillas cuando el sistema coordenado utilizado respeta las simetrías del problema.

Como se muestra en la Fig. 9.1, las *coordenadas cartesianas rectangulares* caracterizan la posición de un punto en el espacio respecto de un triedro (O, X, Y, Z) mediante las proyecciones de su vector de posición $\mathbf{r}_p = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$ del punto P a lo largo de los tres ejes perpendiculares. Este sistema suele ser aconsejable cuando las tres direcciones del espacio son variables independientes.

Si el problema tiene geometría axial, suele ser aconsejable emplear las *coordenadas cilíndricas* en las que la posición de P se caracteriza mediante su coordenada z , la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) y el ángulo θ que forma ésta última con el eje X . Como se deduce de la Fig. 9.1. La relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas es,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y la posición del punto P se especifica mediante las cantidades (r, θ, z) . Las superficies con $r = \text{cte.}$ son cilindros concéntricos cuyo eje de simetría contiene al vector \mathbf{k} . Puede intuirse que este sistema coordenado resultará útil en problemas con simetría alrededor de un eje que podemos alinear con el eje Z .

En este sistema coordenado podemos definir unos vectores unitarios a lo largo de la dirección radial y la del ángulo θ como se indica en la figura. Tendremos,

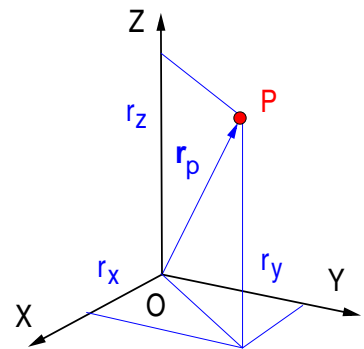


Figura 9.1: Coordenadas cartesianas rectangulares del punto P .

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

que junto con el vector unitario \mathbf{k} satisfacen los productos vectoriales:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta, \quad \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}$$

Estos vectores unitarios son muy útiles cuando por ejemplo, una partícula se mueve describiendo una circunferencia, ya que \mathbf{u}_θ es colineal con la velocidad y $\mathbf{u}_r = -\mathbf{n}$.

Finalmente, podemos encontrarnos con situaciones con simetría esférica en donde suele ser aconsejable emplear *coordenadas esféricas* o *polares*.

Como se observa en la Fig. 9.3, la posición del punto P está determinada por la distancia $r = |\mathbf{r}_p|$ al origen O , el ángulo θ que forma \mathbf{r}_p con el eje Z y el que forma la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) .

Tendremos entonces,

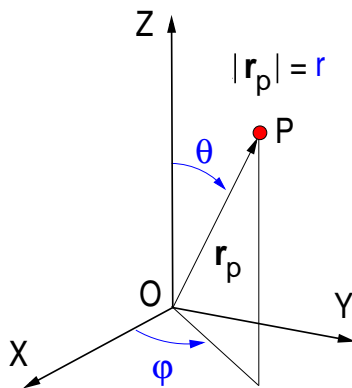


Figura 9.3: Coordenadas esféricas del punto P .

que tengan simetría alrededor de un punto central, o en los que el parámetro fundamental sea la distancia r del punto al origen.

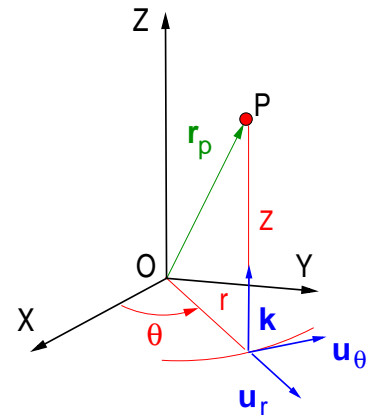


Figura 9.2: Coordenadas cilíndricas del punto P .

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

resultando la posición de P especificada por las cantidades (r, θ, φ) . El ángulo θ varía entre 0 y π de modo que cuando $\theta = 0$ el vector \mathbf{r}_p es paralelo al vector \mathbf{k} y cuando $\theta = \pi$ apunta en la dirección $-\mathbf{k}$.

Puesto que las superficies con $r = \text{cte.}$ son esferas con centro en el origen O la utilidad de este sistema coordenado puede suponerse: Las coordenadas esféricas serán útiles en problemas

9.2. La resolución de las ecuaciones del movimiento

La trayectoria $\mathbf{r}_p(t)$ de una partícula P de masa m se obtiene mediante la segunda ley de Newton (Ec. 4.1),

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad (9.1)$$

en donde se sustituyen las expresiones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ de las fuerzas que actúan sobre la masas m . Esta ecuación vectorial se desglosa en tres ecuaciones escalares,

$$m\ddot{x}(t) = F_x(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad m\ddot{y}(t) = F_y(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad m\ddot{z}(t) = F_z(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad (9.2)$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones desconocidas que debemos determinar y que son las tres componentes del vector $\mathbf{r}_p(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Cada una de las Ecs. 9.2 es una *ecuación diferencial ordinaria* de *segundo orden*, denominada así porque contiene la derivada segunda (como por ejemplo $\ddot{x}(t)$) de la incógnita.

La resolución de las ecuaciones diferenciales que resultan de substituir en la Ec. 9.1 las expresiones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ de las fuerzas es –en general– un problema complicado, salvo en los casos simples que estudiaremos en el presente curso. Para encontrar la trayectoria $\mathbf{r}_p(t)$ además de una solución general de la ecuación diferencial 9.1 (o equivalentemente, del sistema de Ecs. 9.2) necesitaremos conocer la *velocidad* $\mathbf{v}_p(t_0)$ y *posición* $\mathbf{r}_p(t_0)$ de la partícula en un instante dado t_0 . A estos datos se les denomina *condiciones iniciales* del movimiento y vamos a ilustrar con un ejemplo su significado.

Consideremos el movimiento en el plano (x, y) de un proyectil de masa m que es lanzado desde el origen (X, Y) en $t = 0$ con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 como se indica en la figura. La única fuerza que actúa durante el movimiento es la gravedad $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ que es constante en el tiempo y resultan (Ecs. 9.2) las ecuaciones diferenciales,

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg \quad (9.3)$$

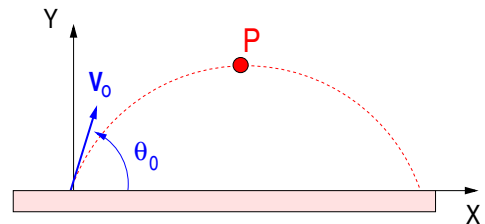


Figura 9.4: Tiro parabólico de la partícula de masa M .

que al ser $F_y = -mg$ una fuerza constante en el tiempo pueden integrarse directamente,

$$v_x = c_{1x} \quad v_y = c_{1y} - gt \quad (9.4)$$

Como puede comprobarse derivando, estas dos velocidades satisfacen las ecuaciones diferenciales 9.3 pero hemos tenido que introducir dos constantes c_{1x} y c_{1y} desconocidas y para determinarlas empleamos las *condiciones iniciales*. Si como se observa en la Fig. 9.4 en el instante inicial $t = 0$ se tiene $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ y $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$ igualando encontramos que $v_{x0} = c_{1x}$ y $v_{y0} = c_{1y}$.

Es decir, las *velocidades iniciales* a lo largo de cada eje determinan, de todas las posibles constantes de integración c_{1x} y c_{2x} en la Ec. 9.4, aquellas que permiten escoger la velocidad $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$ de la partícula compatible con los datos de que disponemos para el instante inicial.

Si efectuamos una nueva integración de las ecuaciones 9.4 tendremos que introducir dos nuevas constantes de integración c_{2x} y c_{2y} ,

$$x(t) = c_{2x} + v_{x0} t \quad y(t) = c_{2y} + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} \quad (9.5)$$

De nuevo hemos de acudir a los datos del instante inicial para determinar las constantes de integración que resultan ser $c_{2x} = x(0) = 0$ y $c_{2y} = y(0) = 0$, relacionadas con las *posiciones iniciales* de la partícula. Como vemos, necesitamos conocer la posición $\mathbf{r}_o = x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j}$ y la velocidad $\mathbf{v}_o = v_{xo}\mathbf{i} + v_{yo}\mathbf{j}$ en un instante dado para determinar la solución (trayectoria) $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ de la Ec. 9.1.

En general, para resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden como la que nos proporciona la segunda ley de Newton necesitamos conocer en un cierto instante de tiempo el valor de la función -la posición de la partícula en nuestro caso- y de su derivada primera -la velocidad- para determinar de entre todas las posibles soluciones de 9.1 la que concuerda con los datos del problema.

9.3. Aproximaciones y series de potencias

En muchas ocasiones hemos de operar con funciones $f(x)$ complicadas que admiten un *desarrollo en serie de potencias* si son derivables infinitas veces que permite aproximarlas por un polinomio. Si conocemos el valor de la función, sus derivadas en el punto $x = a$ y, éstas toman un valor finito, para otro punto x próximo se tiene,

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} + \frac{1}{2!} (x-a)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=a} + \dots + \frac{1}{n!} (x-a)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=a} \quad (9.6)$$

Este polinomio en potencias de $(x-a)$ se denomina *desarrollo en serie de Taylor* de la función $f(x)$ alrededor del punto $x = a$. Se corresponde con el valor exacto de $f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y con su valor aproximado si tomamos un número finito n de potencias en el desarrollo. Los desarrollos en serie de las funciones más comunes pueden encontrarse en el *Apéndice A* de la Ref. [1].

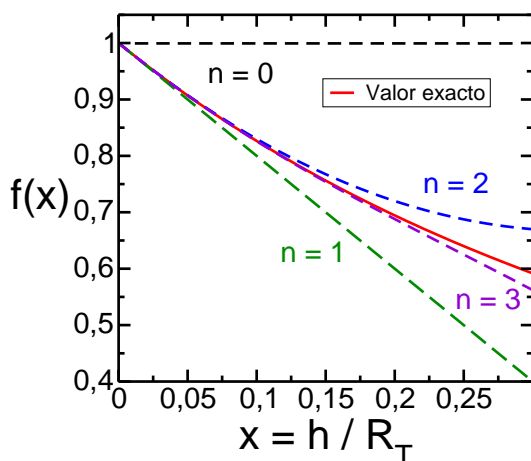


Figura 9.5: Comparación entre $f(x)$ y sus desarrollos en serie de Taylor.

En el desarrollo anterior resulta evidente que -salvo en casos especiales que no consideraremos aquí- cuando $(x-a) \ll 1$ la contribución de los sumandos sucesivos se hace más pequeña a medida que n aumenta al ser cada vez menores las potencias sucesivas $(x-a)^n$ del polinomio anterior.

La utilidad práctica del desarrollo en serie de Taylor 9.6 es permitirnos aproximar los valores de la función $f(x)$ reteniendo sólo unos pocos términos de su desarrollo en serie. Vamos a ilustrar este punto mediante el cálculo de la fuerza F_g que ejerce la Tierra (de radio $R_T = 6400 \text{ km}$) sobre una masa m que se encuentra a una altura h sobre su superficie.

La expresión exacta para F_g es,

$$F_g = -G \frac{m m_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|^2} = -G \frac{m m_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} = -m g \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}$$

donde el cociente $h/R_T \ll 1$, resulta ser un parámetro pequeño que compara la altura $h \ll R_T$ de la partícula con el radio de la Tierra.

Si desarrollamos en potencias de $(x - a)$ con $a = 0$ y $x = h/R_T$ en el desarrollo 9.6 para los tres primeros términos obtenemos,

$$f(x) = \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} \simeq [1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3(\frac{h}{R_T})^2 - 4(\frac{h}{R_T})^3 + \dots] \quad (9.7)$$

Podemos escribir las sucesivas aproximaciones de $f(x)$ como polinomios $P_n(x)$ en potencias de $(h/R_T)^n$ de modo que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1$ (o equivalentemente $f(x) \simeq 1$) y obtenemos entonces $F_g = -mg$. Con esta aproximación la fuerza resultaría independiente de la altura h a la que se encuentra la masa m . Evidentemente $f(x) \simeq 1$ cuando $x \ll 1$, es decir para alturas h despreciables frente al radio de la tierra R_T . A medida que h aumenta la aproximación falla y hemos de tomar polinomios $P_n(x)$ con n crecientes, con $n = 1, 2, 3$ tenemos,

$$P_1(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} \quad , \quad P_2(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T}\right)^2$$

$$P_3(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T}\right)^2 - 4 \left(\frac{h}{R_T}\right)^3$$

En la Fig. 9.5 se han representado el valor exacto de $f(x)$ (línea continua) con los cuatro polinomios $P_n(x)$ anteriores (líneas a trazos) que resultan de tomar en el desarrollo potencias 9.7 crecientes.

Como podemos observar en la Fig. 9.5, la aproximación de una fuerza de gravedad $F_g \simeq mg$ independiente de la altitud ($n = 0$) es muy pobre desde el momento que existe una altura h apreciable. Sin embargo, la diferencia entre el valor exacto de la función $f(x)$ y sus tres aproximaciones es muy pequeña para $x = (h/R_T) < 0,025$, que equivale a alturas $h < 160$ Km. Es decir, podríamos emplear el polinomio $P_1(x)$ para obtener una buena aproximación de $f(x)$ hasta alturas menores que el 2.5 % del radio terrestre. Para valores $x = (h/R_T) < 0,1$ podríamos emplear $P_2(x)$ y hasta aproximadamente $x = (h/R_T) < 0,175$ el último polinomio $P_3(x)$.

Como vemos, la aproximación por un polinomio de grado m estará justificada siempre que la contribución de los términos de las potencias en $(h/R_T)^n$ con $n > m$ pueda despreciarse. Si incrementamos la potencia n en el desarrollo 9.6 mejoraremos la aproximación de $f(x)$ para valores de $x = h/R_T$ mayores aunque la expresión es más complicada.

En muchas ocasiones es conveniente emplear sólo algunos términos del desarrollo en serie de Taylos de una función $f(x)$ complicada, y el número de términos depende del grado de aproximación que necesitamos.

9.4. Propiedades de la elipse

Como se observa en la Fig. 9.6 la elipse puede definirse mediante la relación $|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$ en donde los puntos F y F' son denominados *focos*. Cuando la distancia entre estos dos puntos $|arFF'| = 2c$ es nula ($c = 0$) ambos focos coinciden con el punto O y la elipse se reduce a una circunferencia de radio $R = 2a = 2b$. Las distancias a y b son denominadas *semiejes mayor* y *menor* de la elipse y su área es $A = \pi a b$.

La ecuación de una elipse con centro C en el punto (x_o, y_o) en coordenadas cartesianas es,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \quad (9.8)$$

la distancia del punto mas alejado de cada foco es $d_{max} = a + c$ y la del mas cercano $d_{min} = a - c$ y para el punto Q resulta,

$$2a = |\overline{QF}| + |\overline{QF'}| = 2 \sqrt{b^2 + c^2}$$

de modo que $a^2 = b^2 + c^2$.

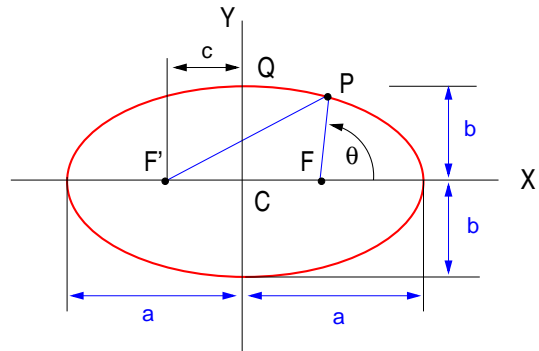


Figura 9.6: Elipse

En algunos casos, como en el movimiento planetario, es útil expresar la ecuación de la elipse en coordenadas polares con origen en el foco F , tomando el ángulo θ que forma \overline{FP} con el eje X . Podemos introducir un parámetro $0 \leq \epsilon = c/a < 1$ denominado *excentricidad*, cuando $\epsilon = 0$ ambos focos coinciden y la elipse se convierte en una circunferencia mientras que en el límite $\epsilon = 1$ degenera en una parábola.

Empleando la ley del coseno al triángulo FPF' , como $|FF'| = 2a\epsilon$ tendremos

$$|\overline{PF'}|^2 = |\overline{PF}|^2 + 4a^2 \epsilon^2 + 4\epsilon a |\overline{PF}| \cos \theta$$

Si la distancia al foco F es $r = |\overline{PF}|$ y substituimos $|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$ resulta,

$$4a^2 - 4a^2 \epsilon^2 = 4ra + 4ar\epsilon \cos \theta$$

y finalmente

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

Cuando $\epsilon = 0$ la distancia $r = a$ es entonces constante, lo que correspondería a una órbita planetaria circular, mientras que si $\epsilon > 0$ la distancia $r(\theta)$ es diferente para cada ángulo θ .

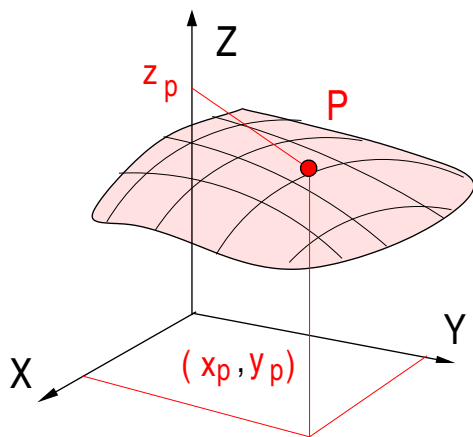


Figura 9.7: Superficie $z = F(x, y)$.

9.5. Campos escalares y vectoriales

En la Física tratamos con magnitudes que pueden ser *escalares* o *vectoriales* que se encuentran definidas sobre regiones del espacio. Un *campo escalar* es una función de tres variables que asigna a cada punto del espacio (x, y, z) el valor de una cierta magnitud $P(x, y, z)$.

Un ejemplo se muestra en la Fig. 9.7 en la que la función escalar $z = F(x, y)$ asocia a cada punto del plano (x_p, y_p) una altura z_p de modo que el conjunto de puntos P definen la superficie S . Otros ejemplos de funciones escalares son el potencial gravitatorio $U(\mathbf{r})$ (sección 4.4.2) o el potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$ (sección 4.4.3).

Un *campo vectorial* es un función que asigna un vector $\mathbf{V}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de una cierta región del espacio. Cada una de las componentes del vector corresponden a una función escalar de modo que,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

Por último, los campos escalares y vectoriales también pueden depender del tiempo y entonces tendremos $P(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

9.6. Derivadas parciales

Las derivadas parciales son una generalización para funciones de varias variables $F(x, y, z, \dots, t)$ del concepto de derivada $f'(x)$ de una función de una variable. Para introducir el concepto consideremos una función escalar $z = F(x, y)$ que, como muestra la Fig. 9.7, asigna a cada punto del plano (x, y) una altura z y que define la superficie S .

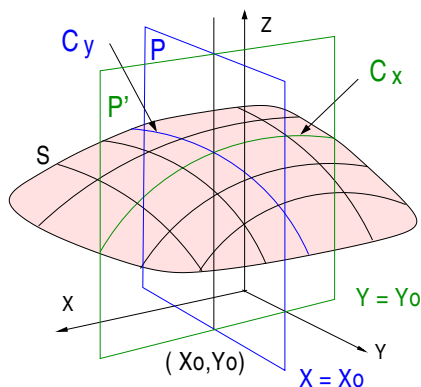


Figura 9.8: Intersección de la superficie S con los planos P y P'

Como muestra la Fig. 9.8 las intersecciones de dicha superficie con los planos P y P' paralelos respectivamente a los planos (Y, Z) y (X, Z) que pasan por las coordenadas $x = x_o$ e $y = y_o$ definen las curvas C_x y C_y . Si hacemos que el punto de y_o recorra el eje Y encontraremos una familia de planos paralelos a P' y al plano (X, Z) que cortarían a la superficie S a lo largo sucesivas curvas paralelas. Lo mismo sucede al recorrer x_o el eje X para las intersecciones de S con planos paralelos a P .

Para cada punto y_o sobre el eje Y , podemos introducir el siguiente límite para la curva contenida en el plano P' ,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x, y_o)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y_o) - F(x, y_o)}{\Delta x} \quad (9.9)$$

que define la *derivada parcial* de la función $z = F(x, y)$ respecto de la variable x .

En la Fig. 9.8 puede comprobarse su significado geométrico. Una vez fijado un punto $y = y_0$ el corte del plano P' con la superficie S nos proporciona la curva C_y , y la derivada parcial corresponde a la pendiente en cada punto a dicha curva contenida en el plano P' . Es decir, la derivada ordinaria de la curva C_x manteniendo constante la coordenada y_0 .

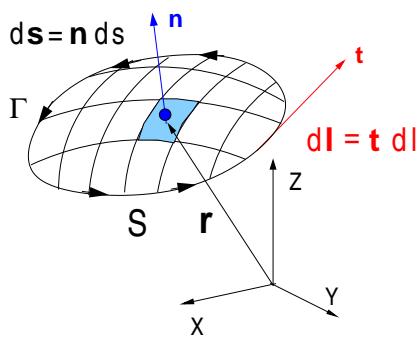
Análogamente podemos introducir la derivada parcial respecto de la variable y ,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y + \Delta y) - F(x_0, y)}{\Delta y}$$

a lo largo de las intersecciones con la superficie S de planos paralelos a P .

Este concepto de derivada parcial se extiende a funciones de más de dos variables $G(x_1, x_2, \dots, x_N)$ como derivada respecto de la variable x_j y también se definen derivadas de orden superior,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$



Las reglas de derivación son las mismas que para las derivadas ordinarias, basta considerar como constantes aquellas variables respecto de las que no calculamos la derivada. Vamos a ilustrar esta regla sencilla mediante un ejemplo. Para la función,

$$V(x, y) = \frac{x}{y} + x^5 y^2 + x \cos(y)$$

se tienen las siguiente derivadas parciales.

Figura 9.9: Superficie S que se apoya en la curva Γ .

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{y} + 5x^4 y^2 + \cos(y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 2x^5 y - x \sin(y)$$

9.7. Curvas y superficies: Convenio de signos

En la figura 9.9 se muestra una superficie S en el espacio delimitada por una curva Γ en la que se apoya. La orientación de una superficie en el espacio se caracteriza mediante un vector unitario \mathbf{n} perpendicular a la misma en cada punto y cuando es cerrada se toma \mathbf{n} a lo largo de la *normal exterior* a la misma. El elemento de superficie es $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la misma en cada punto y $dS = dx dy$ el elemento de área.

Podemos también definir el vector $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ sobre la curva Γ , en donde dl es el elemento de longitud y \mathbf{t} un vector unitario tangente a la curva en cada punto como se indica en la Fig. 9.9.

El sentido *positivo* del recorrido de Γ respecto de un triedro orientado a derechas como el de la figura se toma el contrario a las agujas del reloj. En el dibujo las flechas indican el sentido positivo del vector $d\mathbf{l}$.

9.8. Integral de línea

Consideremos una función vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ definida en una zona del espacio,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(x, y, z) \mathbf{i} + A_y(x, y, z) \mathbf{j} + A_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

y una expresión $\mathbf{r}(t)$ que describe una curva C , como por ejemplo, la trayectoria de un punto material en el espacio de modo que en cada punto de la curva la función vectorial toma el valor $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t))$.

Como muestra la Fig. 9.10 entre dos puntos de la curva A y B dados podemos dividirla en N tramos pequeños de longitud $|\Delta \mathbf{r}_j|$ definidos por los vectores $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$ donde la función toma los valores $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$. En cada uno de los $j = 1, \dots, N + 1$ puntos podemos construir los productos escalares,

$$\mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j = |\mathbf{A}_j| |\Delta \mathbf{r}_j| \cos \theta_j$$

en donde θ_j es el ángulo que forma a lo largo de la curva el vector $\Delta \mathbf{r}_j$ con el vector \mathbf{A}_j . Si efectuamos la suma,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j$$

Podemos considerar el límite haciendo que el número de tramos N en que dividimos la curva C entre A y B aumente indefinidamente, resultando las distancias $|\Delta \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|$ cada vez más pequeñas.

De este modo el vector $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} \rightarrow d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ es paralelo al vector \mathbf{t} tangente a la curva en cada punto cuyo módulo infinitesimal es la longitud de arco dl . Tendremos entonces,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j \rightarrow \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Esta última expresión se la denomina *integral de línea* o *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a lo largo de la curva C entre los puntos A y B considerados. Al vector $d\mathbf{l}$ se le aplican los criterios discutidos en la Pag. 110 sobre el sentido de recorrido de la curva C ¹.

Cuando la curva es cerrada se suele indicar en el signo integral mediante,

$$I = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

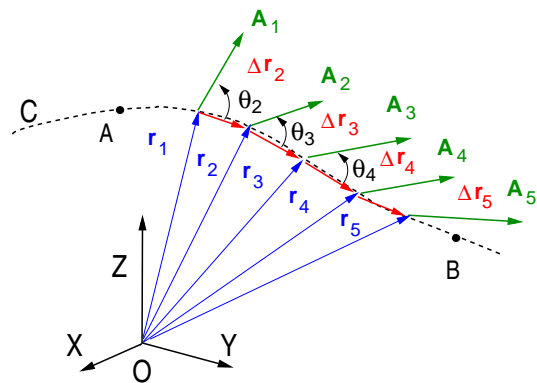


Figura 9.10: Curva C definida en un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

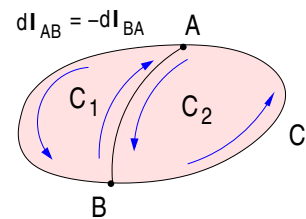


Figura 9.11: La curva cerrada C se descompone en dos C_1 y C_2 .

¹La integral de línea se introduce en la Sec. 8.2, pags. 203-206 Vol I de la Ref. [1] en el contexto del *trabajo* de una fuerza.

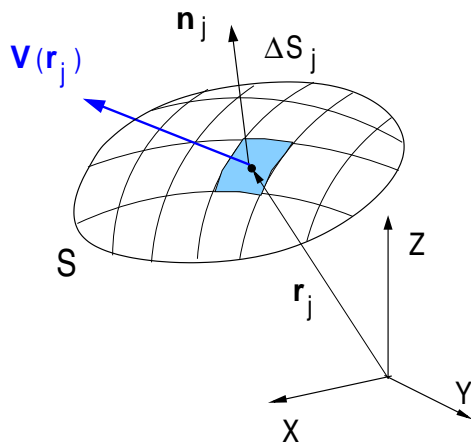
y además, si la curva es una función suave, como se muestra en la Fig. 9.11, puede descomponerse en dos curvas C_1 y C_2 que compartan un tramo común AB . Si extendemos la integral de línea sobre los bordes de cada uno de los dos recintos de la Fig. 9.11 tendremos,

$$I = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Evidentemente la circulación del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en el sentido AB será igual y cambiada de signo a la del sentido BA y a lo largo de este tramo $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$,

$$\int_A^B \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_B^A \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2$$

9.9. Flujo de un campo vectorial



Si tenemos una función vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ definida en una cierta región del espacio y una superficie S como indica la Fig. 9.12. Esta última puede dividirse en N cuadrados infinitesimales de área ΔS_j situados en los puntos \mathbf{r}_j y caracterizados por un vector unitario \mathbf{n}_j centrado en el mismo.

Podemos definir el vector $\delta \mathbf{S}_j = \Delta S_j \mathbf{n}_j$ situado en \mathbf{r}_j . sobre cada una de las N losetas en donde la función vectorial toma el valor $\mathbf{V}(\mathbf{r}_j)$. Sumando los productos escalares,

$$\delta \phi_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot \delta \mathbf{S}_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j$$

Figura 9.12: Flujo de un campo vectorial a través de la superficie S

definidos sobre cada uno de los $j = 1, \dots, N$ elementos infinitesimales de S .

$$\Delta \phi = \sum_{j=1}^{j=N} \delta \phi_j = \sum_{j=1}^{j=N} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j$$

y tomando el límite cuando $\Delta S_j \rightarrow 0$ podemos reemplazar el sumatorio por una integral,

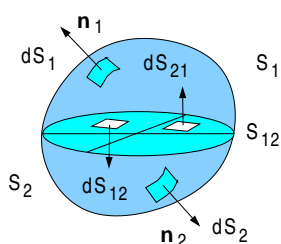
$$\sum_{j=1}^{j=N} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j \rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{S} \quad (9.10)$$

en donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ es el elemento de superficie siendo \mathbf{n} el vector unitario normal a la misma en cada punto. A la integral 9.10 se la denomina *flujo del campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S* y al vector $d\mathbf{S}$ se le aplican los criterios discutidos en la Pag. 110 ².

²Este concepto se introduce en la Sec. 16.2, pags. 577-578 Vol II de la Ref. [1]

El *flujo* de un campo vectorial a través de una superficie es aditivo, es decir si descomponemos una superficie S en dos trozos S_1 y S_2 como en la Fig. 9.13 que comparten la zona sombreada común S_{12} sobre la cual $d\mathbf{S}_{12} = -d\mathbf{S}_{21}$ por lo tanto,

$$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_{12}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{12} + \int_{S_{21}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{21} + \int_{S_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_2$$



Los dos primeros sumandos son justamente el flujo ϕ_{S_1} sobre la mitad superior de la Fig. 9.13,

$$\phi_{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_{12}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{12}$$

y lo mismo sucede para ϕ_{S_2} en la mitad inferior, de este modo,

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2}$$

Figura 9.13: Superficie S dividida en S_1 y S_1 .

9.10. El operador nabla: Gradiente y divergencia

Si tenemos definidas en cada punto (x, y) las derivadas parciales de la función $F(x, y)$ que define la superficie S de la Fig. 9.14 podemos construir el siguiente vector,

$$\mathbf{q}(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{j}$$

que se denomina *gradiente* de la función $F(x, y)$ y se expresa como $\mathbf{q} = \nabla F$, y como vemos en la Fig. 9.14 sería un vector tangente a la superficie S en el punto (x_o, y_o) . Al operador

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se le denomina *operador nabla*. Para una función de tres variables $h(x, y, z)$ generalizando la definición anterior se tendrá,

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

pero no tiene una interpretación geométrica tan sencilla³. Si diferenciamos la función $h(x, y, z)$, obtenemos,

³Puede consultarse la sección 8.7 Vol I de la Ref. [1], pags. 217-218 y la Ref. [2] sección 3.6, pags. 101-102. Una discusión pormenorizada se encuentra en la Ref. [4], sección 5.7, pags. 153-157.

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz$$

que puede entenderse como el producto escalar $dh = d\mathbf{r} \cdot \nabla h$ de los vectores $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ y $\mathbf{q} = \nabla h$. Geométricamente dh representa el cambio que experimenta la función h al pasar del punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ al punto $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$,

$$dh = d\mathbf{r} \cdot \nabla h = |d\mathbf{r}| |\nabla h| \cos(\theta)$$

en donde θ es el ángulo formado por los vectores $d\mathbf{r}$ y ∇h . Para una distancia fija $|d\mathbf{r}|$ del punto \mathbf{r} el cambio dh será máximo cuando $\theta = 0$, es decir cuando $d\mathbf{r}$ y $\mathbf{q} = \nabla h$ son paralelos. En cada punto \mathbf{r} el vector $\mathbf{q} = \nabla h$ apunta en la dirección en la que el cambio de $h(x, y, z)$ es más rápido y su módulo representa el incremento de h por unidad de longitud en esa dirección.

Si $\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s$ es un pequeño desplazamiento a partir del punto \mathbf{r}_o de longitud Δs a lo largo de la dirección que marca el vector unitario \mathbf{n} entonces,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s) - h(\mathbf{r}_o)}{\Delta s}$$

representa la derivada de la función $h(x, y, z)$ a lo largo de la dirección \mathbf{n} . Desarrollando en serie de potencias,

$$h(\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s) = h(\mathbf{r}_o) + (\mathbf{n} \Delta s) \cdot \nabla h + O(\Delta s^2)$$

y podemos identificar,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \nabla h \cdot \mathbf{n} \quad (9.11)$$

La proyección del vector gradiente $\mathbf{q} = \nabla h$ a lo largo de una dirección \mathbf{n} es igual a la derivada de dicha función tomada a lo largo de la misma. Esta propiedad puede comprobarse en un caso particular importante, cuando la función es de la forma $h(x, y, z) = h(r)$ es decir, sólo depende de la distancia $|\mathbf{r}| = r$ tendremos,

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

y donde $\partial h / \partial r = dh / dr = h'(r)$ y las otras derivadas son análogas,

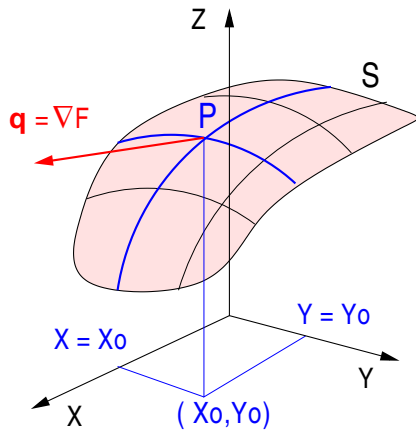
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

resultando finalmente una expresión sencilla,

$$\nabla h = \frac{dh}{dr} \left(\frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dh}{dr} \quad (9.12)$$

Como vemos es una aplicación de la Ec. 9.11 con $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ y la hemos empleado implícitamente cuando definimos la energía potencial gravitatoria en la Pag. ??.

También podemos hacer actuar el operador nabla sobre una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ formando el siguiente producto escalar,



$$\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x(\mathbf{r}) \mathbf{i} + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{j} + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{k})$$

que escribimos como,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (9.13)$$

y esta operación se la denomina *divergencia* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

El flujo de un campo vectorial (Ec. 9.10) está relacionado con la divergencia del mismo que nos proporciona la Ec. 9.13. Consideremos un volumen infinitesimal como el de la Fig. 9.15, $dV = dx dy dz$ donde existe un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Figura 9.14: Vector $\mathbf{q} = \nabla F$ en el punto P .

Las superficies en y_1 e $y_1 + \Delta y$ se caracterizan por un vector $\Delta S \mathbf{j} = \Delta X \Delta Z \mathbf{j}$

Si calculamos como cambia el campo a lo largo de la dirección Y perpendicular a las dos superficies dibujadas en y_1 e $y_1 + \Delta y$ tendremos,

$$A_y(y_1 + \Delta y) \simeq A_y(y_1) + \Delta A_y = A_y(y_1) + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y$$

puesto que $\Delta y \ll 1$ y análogamente para las otras direcciones,

$$\Delta A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \quad \text{y} \quad \Delta A_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z$$

Sobre el primer plano en $y = y_1$ podemos calcular,

$$\phi_y(y_1) = A_y(y_1) \Delta X \Delta Z$$

y para $y = y_1 + \Delta y$ se tiene,

$$\phi_y(y_1 + \Delta y) = A_y(y_1 + \Delta y) \Delta X \Delta Z$$

La función $\phi_y(y_1)$ es un escalar que resulta de multiplicar el valor que toma la componente A_y del campo vectorial en dicho punto por el área de la superficie infinitesimal y es el *flujo* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través del área Δs ⁴.

La diferencia entre ambas caras es,

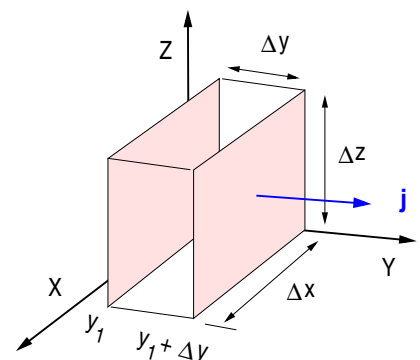


Figura 9.15: Cubo de volumen infinitesimal dV

⁴Una introducción de este concepto se encuentra en la página 112

$$\Delta\phi_y = [A_y(y_1 + \Delta y) - A_y(y_1)] \Delta X \Delta Z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y repitiendo el mismo procedimiento para las otras dos direcciones X y Z ,

$$\Delta\phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V \quad \text{y} \quad \Delta\phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V$$

Sumando las tres contribuciones $\Delta\phi = \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z$ tendremos para todo el volumen infinitesimal ΔV ,

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V \quad (9.14)$$

Por ejemplo si \mathbf{E} es el campo eléctrico, el *flujo* $\Delta\phi$ del campo eléctrico que atraviesa el volumen infinitesimal ΔV se relaciona con la divergencia de \mathbf{E} mediante,

$$\Delta\phi = (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V$$

y tomando de nuevo el límite $\Delta V \rightarrow 0$ e integrando sobre el volumen V_s que encierra una superficie cerrada S ,

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V_s} \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

Para una función *escalar* $H(\mathbf{r})$ existe una igualdad muy parecida, salvo que en lugar de la divergencia aparece el vector *gradiente* ∇H de la función escalar. Podemos razonar de modo análogo al caso de una función vectorial, sobre ambas caras de la Fig. 9.15 tendremos,

$$H|_{(y_1)}(\Delta X \Delta Z) \mathbf{j} \quad \text{y} \quad H|_{(y_1 + \Delta y_1)}(\Delta X \Delta Z) \mathbf{j}$$

y si construimos la diferencia,

$$\Delta\varphi_y \mathbf{j} = (H|_{(y_1 + \Delta y_1)} - H|_{(y_1)}) \Delta S \mathbf{j} = \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} (\Delta X \Delta Y \Delta Z)$$

Sumando las contribuciones de las tres direcciones del espacio,

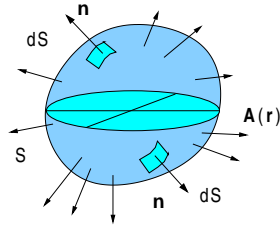
$$\Delta\varphi_x \mathbf{i} + \Delta\varphi_y \mathbf{j} + \Delta\varphi_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Delta V = \nabla H \Delta V$$

aunque ahora el término de la izquierda no es el flujo de un vector sino la integral de la función $H(x, y, z)$ sobre la superficie S caracterizada por el vector $d\mathbf{S}$,

$$H(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \nabla H dV \quad (9.15)$$

Aunque resulta muy semejante a la Ec. 9.14 hay que subrayar que es una igualdad *vectorial* mientras que 9.14 es una ecuación *escalar*.

9.11. El teorema de Gauss



De la ecuación 9.14 podemos extraer una importante consecuencia si la combinamos con la definición de flujo del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de la ecuación 9.10. Tomando el límite $\Delta V \rightarrow 0$ e integrando sobre el volumen,

$$\int \Delta \phi = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V \rightarrow \phi = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

Figura 9.16: Flujo del campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S .

y combinándolo con la definición de *flujo* de \mathbf{A} a través de la superficie S que encierra el volumen V_S de la Ec. 9.10 tendremos,

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_S} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \tag{9.16}$$

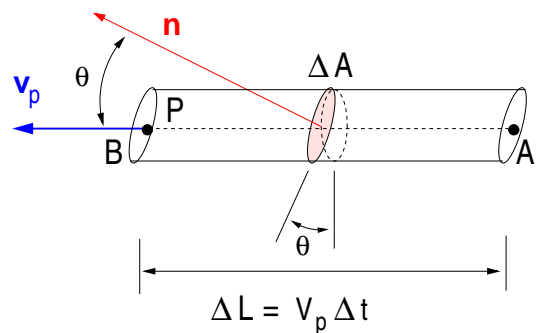
Esta igualdad se denomina *Teorema de la Divergencia* o *de Gauss* y como se observa en la Fig. 9.16 relaciona el *flujo* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S que encierra al volumen V_S con el valor de la integral de su divergencia en el interior de dicho volumen.

La igualdad integral análoga para una función escalar $H(\mathbf{r})$ de acuerdo con la Ec. 9.15 será,

$$\int_S H(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int_{V_S} (\nabla H) dV \tag{9.17}$$

9.12. Ecuación de continuidad y vector flujo másico

Consideremos una superficie S como se indica en la Fig. ?? que es atravesada por una corriente de fluido. En la Fig. 9.17 se muestra la ampliación de la superficie infinitesimal de área ΔA situada en el punto \mathbf{r} . Esta se caracteriza por un vector normal unitario \mathbf{n} que forma un ángulo θ con el vector velocidad del fluido \mathbf{v}_p en dicho punto. Durante el intervalo de tiempo infinitesimal Δt podemos considerar constante la velocidad \mathbf{v}_p del punto característico P mientras pasa de A a B .



A lo largo de Δt la longitud que recorre P es $\Delta L = v_p \Delta t$ y el volumen de fluido encerrado en el tubo de la figura será,

Figura 9.17: Corriente que atraviesa una superficie infinitesimal ΔA durante el tiempo Δt .

$$\Delta V = \Delta L \Delta A \cos \theta$$

y la masa del fluido encerrado en dicho tubo,

$$\Delta M = \rho(\mathbf{r}, t) \Delta V = \rho(\mathbf{r}, t) v_p \Delta A \cos \theta \Delta t$$

Calculamos la masa de fluido que atraviesa la sección ΔS durante el tiempo Δt como,

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} \Delta A$$

y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ e integrando sobre todos los puntos P de la superficie S de la Fig. ??

$$\frac{dM}{dt} = \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

en donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido en cada punto \mathbf{r} sobre S . Esta última ecuación nos proporciona la cantidad de masa que pasa por la superficie S en la unidad de tiempo.

Se define el vector $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}$, denominado *densidad de flujo másico* como la masa que atraviesa la superficie tangente a las líneas de corriente por unidad de tiempo y superficie ⁵. La integral,

$$\frac{dM}{dt} = \int_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} dA$$

es el *flujo* del vector de flujo másico a través de la superficie S ⁶. En el caso de que la superficie S sea cerrada como la de la Fig. 9.18 hay que considerar además el sentido de \mathbf{j}_m respecto de la normal \mathbf{n} a la superficie,

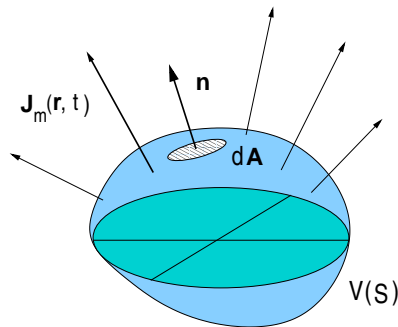


Figura 9.18: Vector flujo másico $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$ que atraviesa la superficie cerrada S que encierra el volumen $V(S)$.

$$\frac{dM}{dt} = - \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} \quad (9.18)$$

De nuevo esta ecuación describe la variación en el tiempo de la masa encerrada dentro de la superficie S . El vector flujo másico es paralelo a la velocidad \mathbf{v} y si la materia *sale* de S apunta hacia el exterior siendo paralelo a $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$, luego $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} > 0$ y la masa contenida en el volumen V disminuye. El caso contrario $dM/dt > 0$ se tiene cuando la corriente *entra* en S y $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} < 0$ ya que ambos vectores apuntan en sentidos contrarios.

La Ec. 9.18 puede expresarse de otro modo, empleando el Teorema de Gauss ⁷ para transformar el flujo de \mathbf{j}_m a través de la superficie S en una integral de volumen,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_S} \rho dV + \int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{j}_m dV = \int_{V_S} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m \right) dV = 0$$

Puesto que el volumen V_S es arbitrario ha de ser nulo el integrando y encontramos la *ecuación de continuidad*,

⁵Puede consultarse la sec. III.2, pags. 414-415 de la Ref. [5]

⁶El concepto de flujo de un campo vectorial a través de una superficie se encuentra en la Pag. 112 de la sección *Complementos*.

⁷Esta transformación es la Ec. 9.16 de la Pag 9.11 del capítulo *Complementos*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0 \quad (9.19)$$

que expresa la conservación de la masa del fluido.

9.13. Los ejes principales de inercia

Si escogemos un punto O' arbitrario como origen del triedro S' ligado al sólido el tensor de inercia \mathbf{I} toma su forma general,

$$\mathbf{I}_{S'} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, por ser simétrico y todos sus elementos de matriz reales siempre existirá una transformación ortogonal de coordenadas del triedro S' a otro S'' en el que \mathbf{I} tome su expresión mas sencilla que es la forma diagonal.

$$\mathbf{I}_{S''} = \begin{pmatrix} I_{x''x''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y''y''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z''z''} \end{pmatrix}$$

siendo los ejes (X'', Y'', Z'') mutuamente perpendiculares.

Esta propiedad está garantizada por un teorema de diagonalización de matrices reales simétricas cuyos detalles pueden encontrarse en la Sec. 10.4 de la Ref. [2]. Los tres autovalores de la matriz $\mathbf{I}_{S'}$, (los momentos de inercia $I_{x''x''}$, $I_{y''y''}$ y $I_{z''z''}$) son las tres raíces λ_1 , λ_2 y λ_3 del polinomio en potencias de λ que resulta del determinante,

$$\begin{vmatrix} (I_{x'x'} - \lambda) & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & (I_{y'y'} - \lambda) & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & (I_{z'z'} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Los autovalores pueden ser iguales (se dicen entonces *degenerados*) y sus tres autovectores asociados \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 son siempre ortogonales. Podemos escoger sus direcciones como las de los ejes del nuevo triedro S'' -los ejes principales de inercia- en los que el tensor de inercia resulta ser $\mathbf{I}_{S''}$.

En el caso de un *cuerpo homogéneo con simetrías* no es necesario calcular explícitamente las direcciones de los autovectores ya que basta examinar sus simetrías para determinarlas. Puede demostrarse (Ref. [2] Pags. 444-447) que,

- *Todo plano de simetría de un cuerpo es perpendicular a un eje principal.*
- *Todo eje de simetría de un cuerpo es eje principal. El plano perpendicular a dicho eje es un plano principal correspondiente a un momento principal de inercia degenerado.*

- [1] M. Alonso y E.J. Finn *Física* (3 Vols) Volumen I. Addison Wesley Iberoamericana (1986).
- [2] K.R. Symon, *Mecánica* Ed. Aguilar, Madrid (1977).
- [3] J. Nordwood *Mecánica clásica a nivel intermedio*, Prentice Hall International (1981).
- [4] A.P. Arya *Introduction to classical mechanics*, Allyn and Bacon (1990).
- [5] José-Philippe Pérez *Mécanique. Points matériels, solides, fluides*. Masson (1995).
- [6] L. Landau, A. Ajeizer y E. Lifshitz *Curso de Física General: Mecánica y Física Molecular*, Editorial Mir (1988).
- [7] R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands *The Feynman lectures on Physics*, Vol. II, Fondo Educativo Interamericano (1976).

