

Mecánica I
Tema 2
Cinemática del Sólido

Manuel Ruiz Delgado

27 de septiembre de 2010

Índice

Orientación o actitud

Campo de velocidades

Movimiento plano





Orientación o actitud

Modelos

Grados de libertad

Grados de Libertad de un Sólido

Sistemas de referencia y vectrices

Vectrices y matrices de componentes

Configuración del sólido rígido

Matriz de rotación del sólido rígido

Matriz de giro y cambio de base

Giro respecto a un eje fijo

Propiedades de las matrices de giro

Las matrices de rotación son ortogonales

Teorema de Euler

Matriz de giro con ángulos de Euler

Ángulos de Euler clásicos / Tait-Bryan

Sistemas de representación de la actitud





Modelos

Partícula o Punto: Un cuerpo cuyas dimensiones u orientación no influyen en el movimiento. Se modela como un punto geométrico.





Modelos

Partícula o Punto: Un cuerpo cuyas dimensiones u orientación no influyen en el movimiento. Se modela como un punto geométrico.

Sólido rígido: Conjunto de partículas finito o infinito cuyas distancias relativas se mantienen constantes (y conocidas):

$$|\mathbf{r}_{ij}| = \text{Const.} \quad \forall i, j$$





Modelos

Partícula o Punto: Un cuerpo cuyas dimensiones u orientación no influyen en el movimiento. Se modela como un punto geométrico.

Sólido rígido: Conjunto de partículas finito o infinito cuyas distancias relativas se mantienen constantes (y conocidas):

$$|\mathbf{r}_{ij}| = \text{Const.} \quad \forall i, j$$

- En cinemática, los puntos no tienen masa; en dinámica sí. En dinámica se usa también un modelo continuo, además del de puntos.
- Un sistema de referencia cumple las propiedades anteriores, y **en cinemática** se considera equivalente a un sólido.
- Para estudiar el movimiento de un sólido, se toma un sistema de referencia rígidamente unido a él: en este sistema, las coordenadas de los puntos del sólido son siempre constantes.
- Los sólidos reales sufren deformaciones, pero suelen ser muy pequeñas, y en Mecánica Clásica se desprecian.





Grados de libertad

Grados de libertad: Número de parámetros **independientes** necesarios para describir la configuración de un sistema.



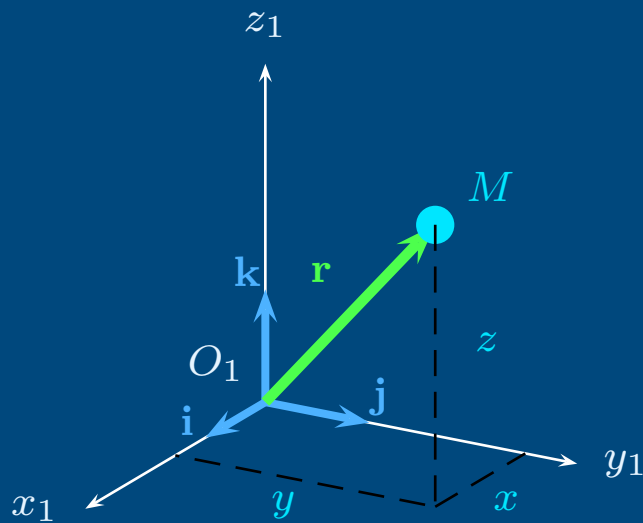


Grados de libertad

Grados de libertad: Número de parámetros **independientes** necesarios para describir la configuración de un sistema.

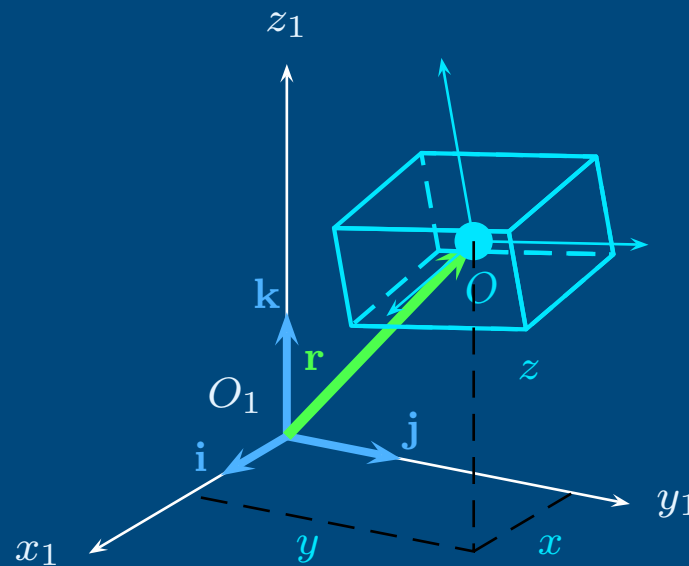
Para sistemas **libres** (sin ligaduras):

Partícula



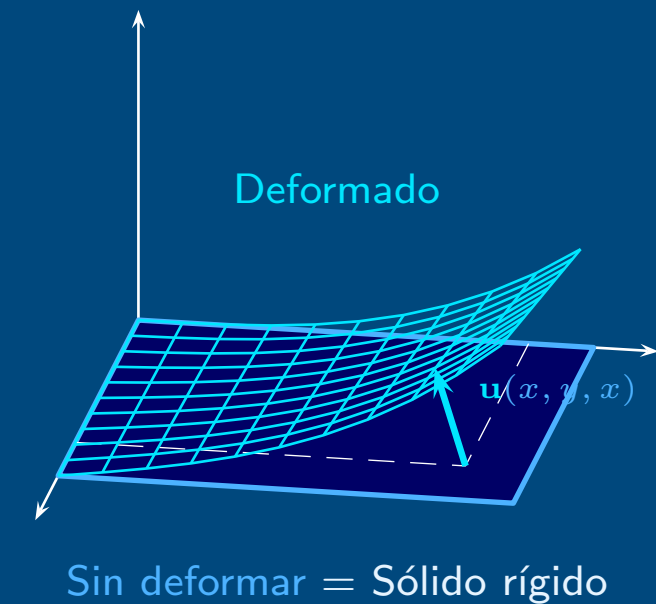
GDL: 3

Sólido rígido



GDL: 6
(Mov. Plano: 3)

Sólido deformable



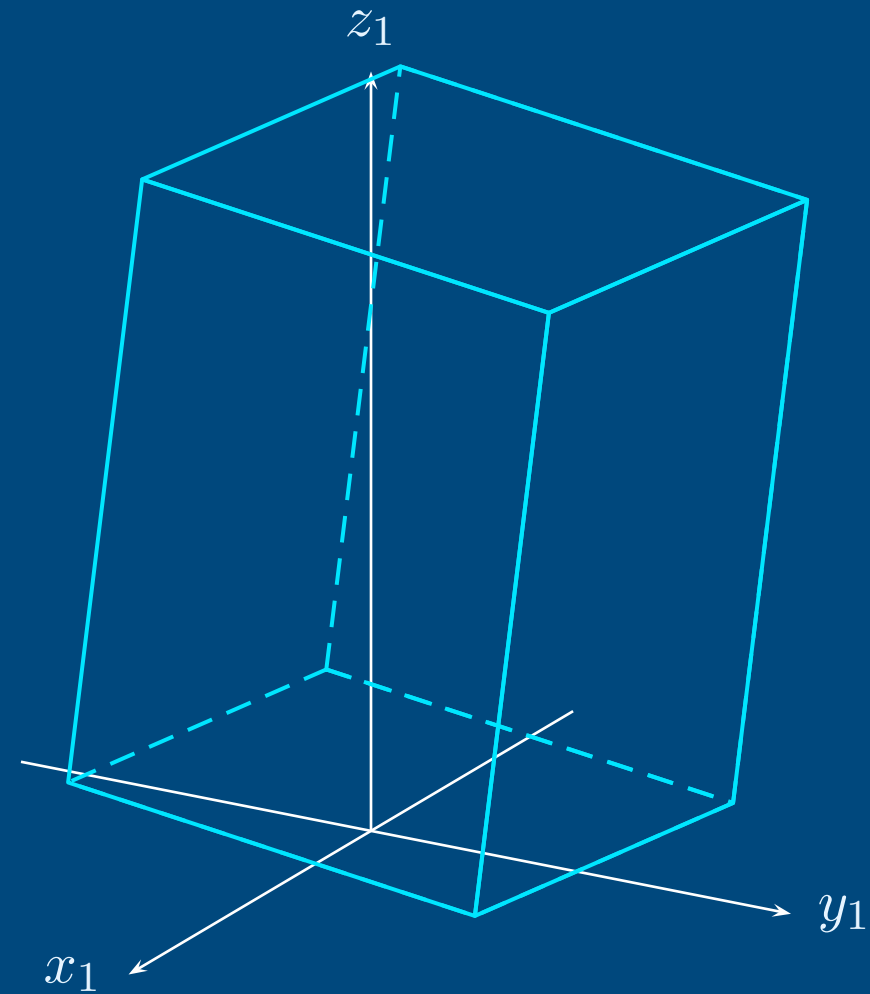
GDL: ∞





Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

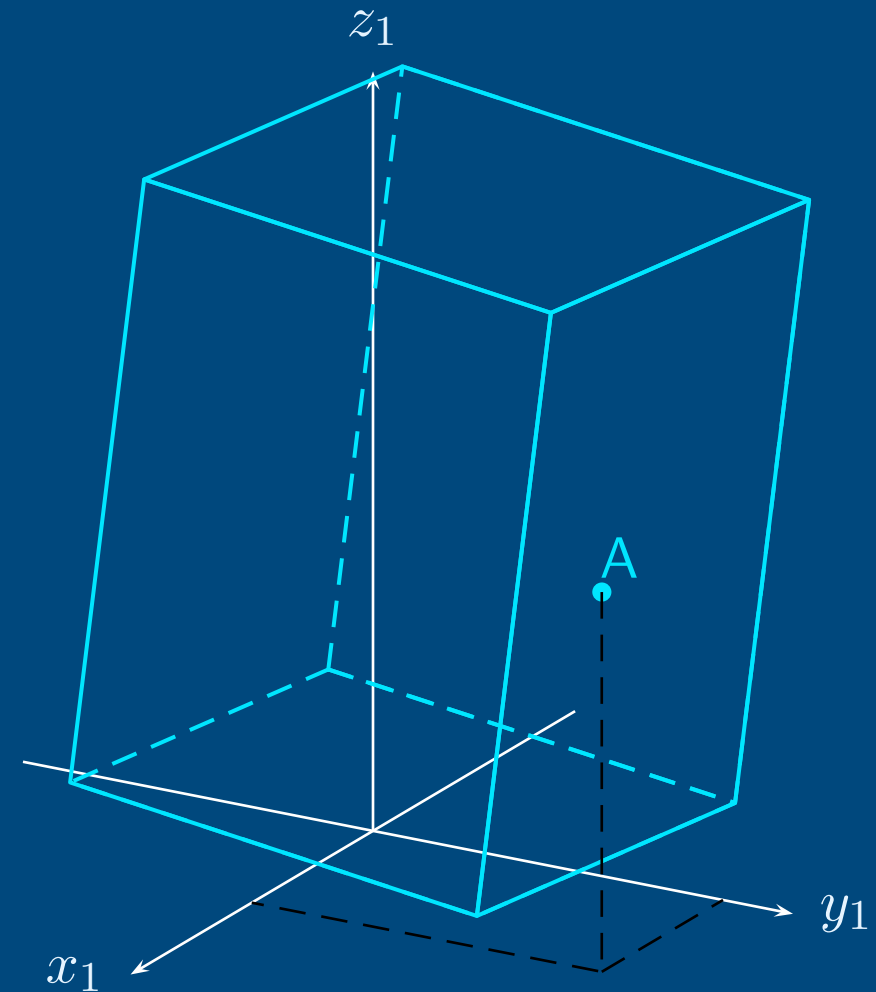




Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-

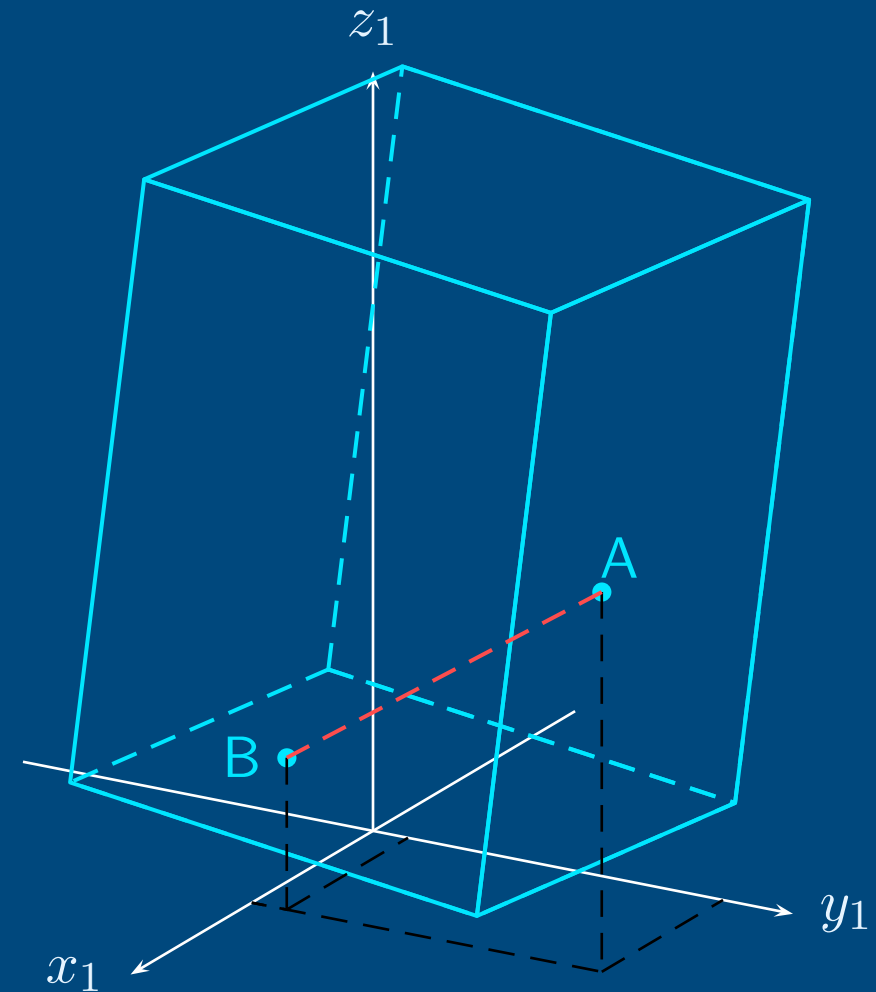




Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-
B	x_B, y_B, z_B	2	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = d_{AB}$

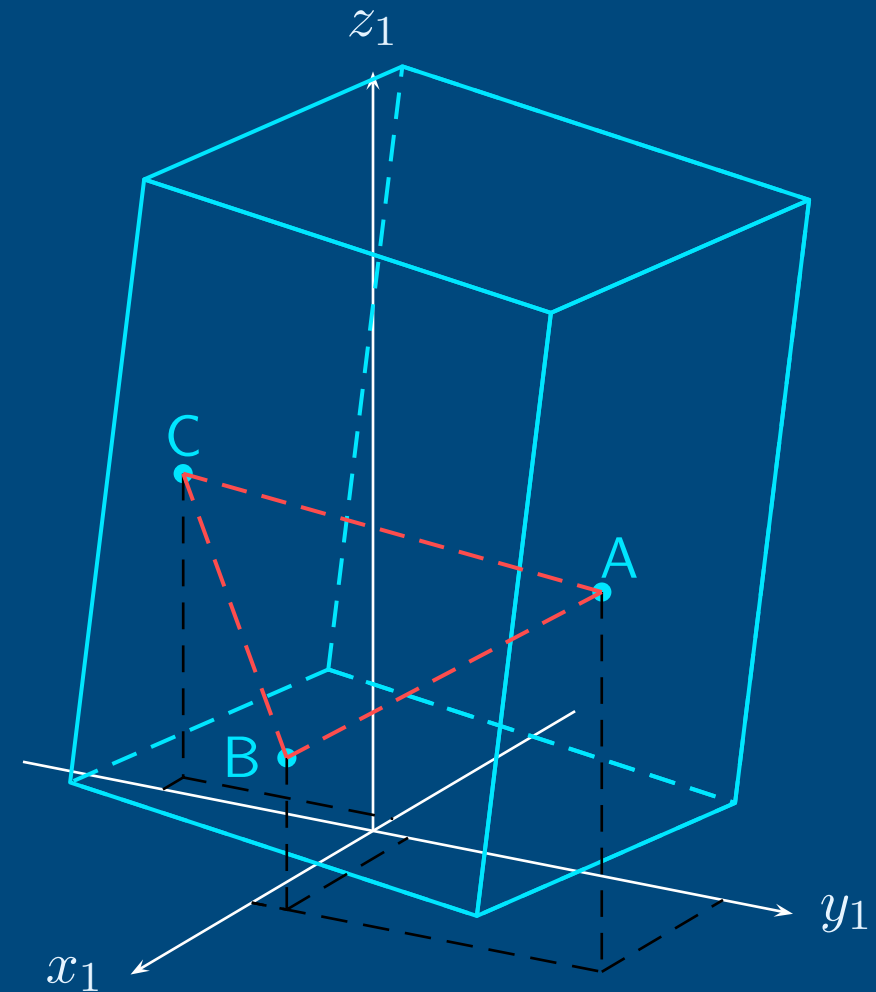




Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-
B	x_B, y_B, z_B	2	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = d_{AB}$
C	x_C, y_C, z_C	1	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C = d_{AC}$ $ \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C = d_{BC}$

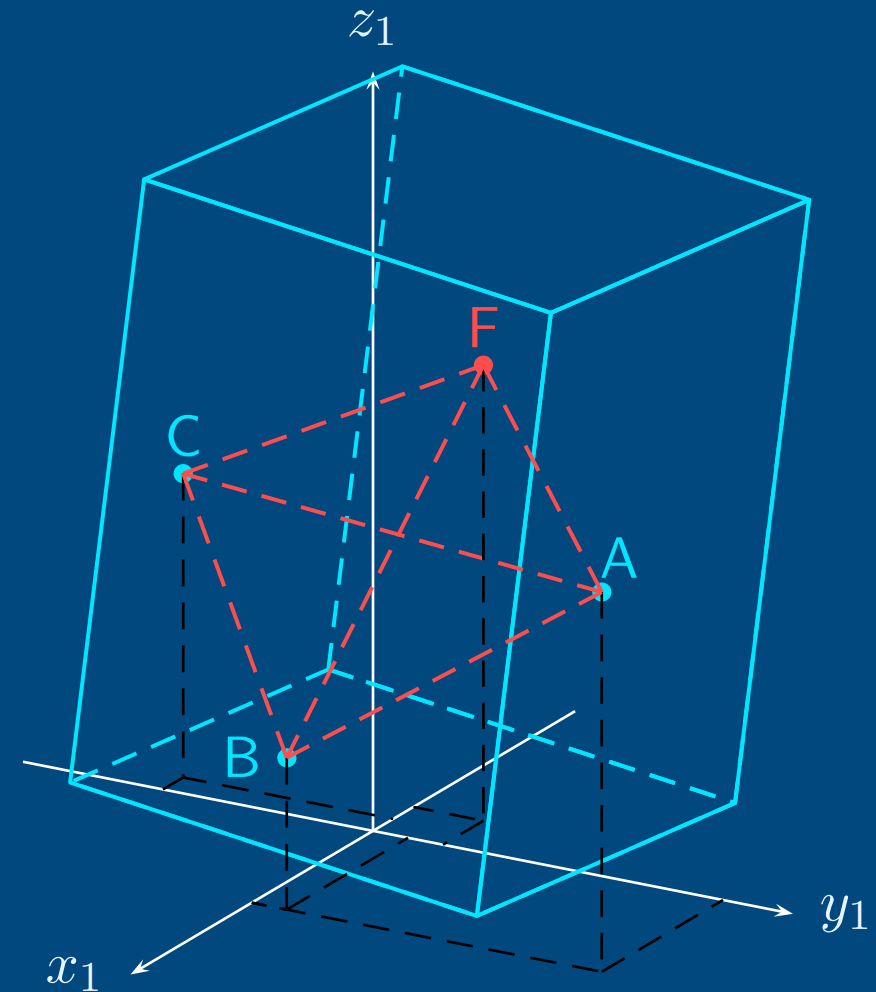




Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-
B	x_B, y_B, z_B	2	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = d_{AB}$
C	x_C, y_C, z_C	1	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C = d_{AC}$ $ \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C = d_{BC}$
⋮	⋮	⋮	⋮
F	x_F, y_F, z_F	0	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_F = d_{AF}$ $ \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_F = d_{BF}$ $ \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_F = d_{CF}$

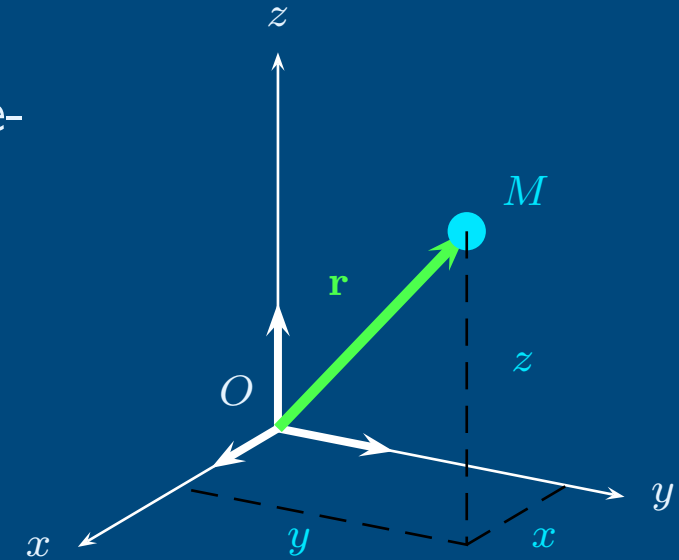




Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$





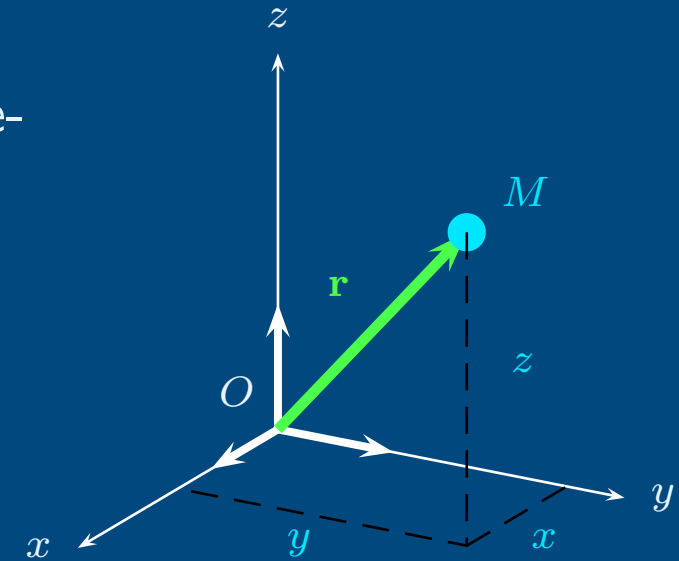
Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M en S_1

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$





Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

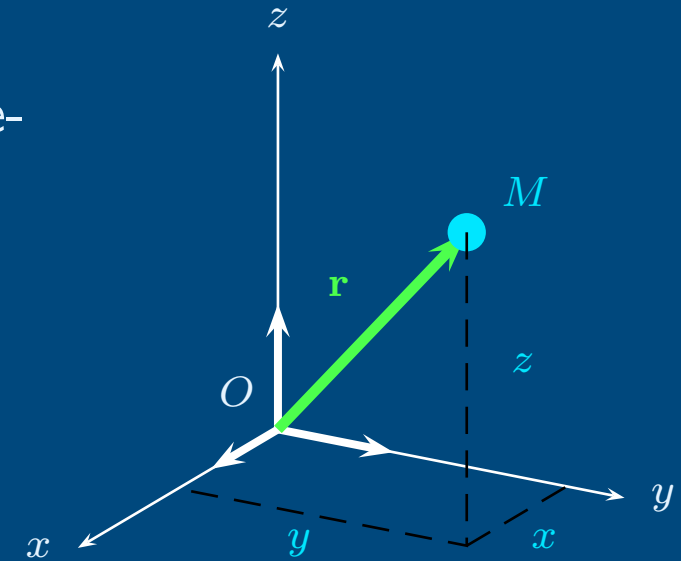
$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M en S_1

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$

Vectriz \mathcal{R}_1 del sistema de referencia S_1 : matriz fila de los vectores unitarios de S_1 (¡Matriz cuyas componentes son vectores!)

$$\mathcal{R}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$$





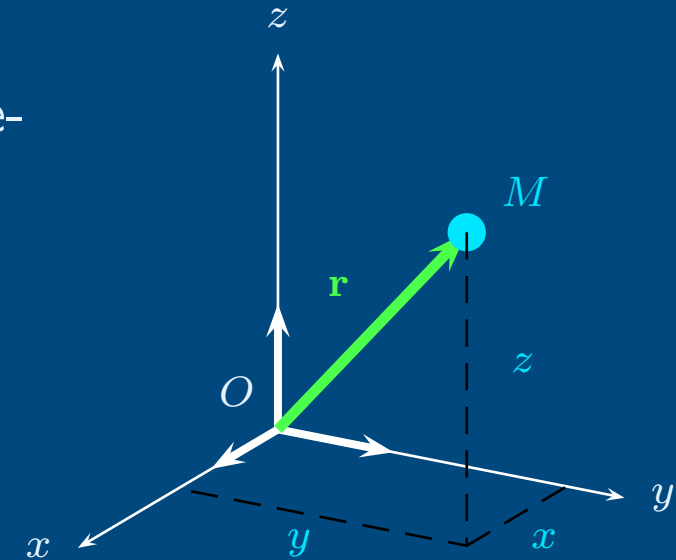
Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M en S_1

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$



Vectriz \mathcal{R}_1 del sistema de referencia S_1 : matriz fila de los vectores unitarios de S_1 (¡Matriz cuyas componentes son vectores!)

$$\mathcal{R}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$$

Matriz de componentes X_1^M del vector \mathbf{r}^M en S_1 : Matriz columna de las coordenadas cartesianas de M en S_1

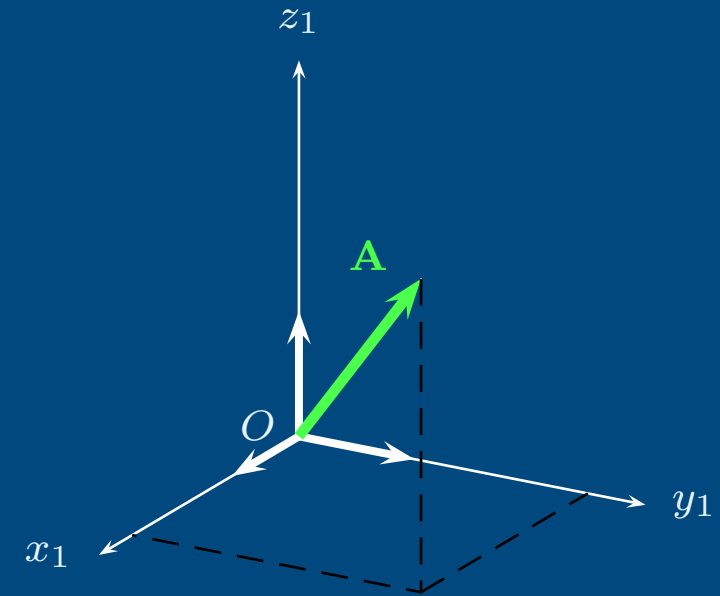
$$X_1^M = [x, y, z]^T$$





Vectores y matrices de componentes

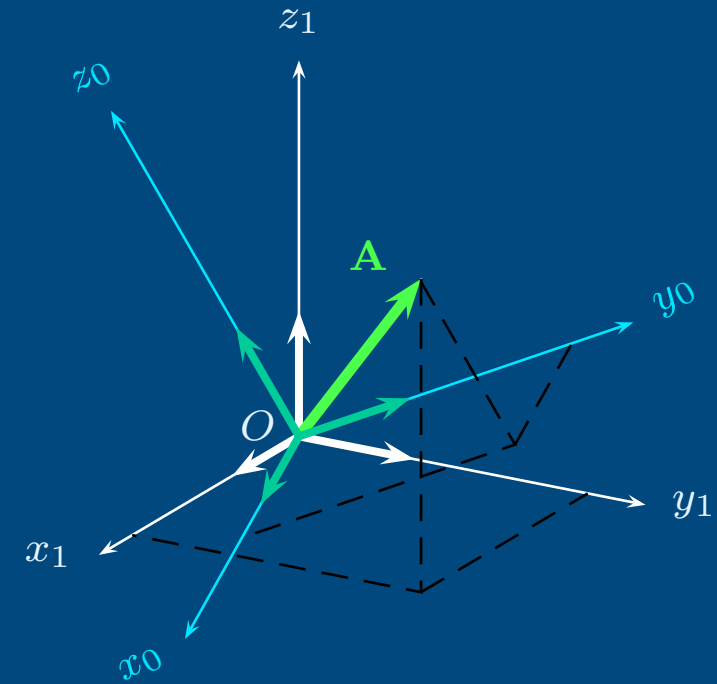
- El vector **A** es una entidad geométrica del espacio vectorial \mathbb{R}^3





Vectores y matrices de componentes

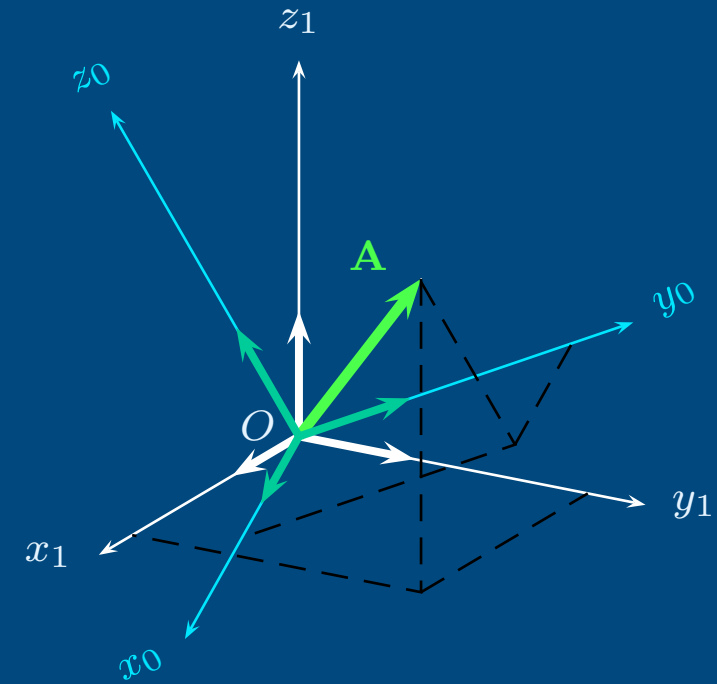
- El vector \mathbf{A} es una entidad geométrica del espacio vectorial \mathbb{R}^3
- Se maneja mediante su matriz de componentes en un sistema de referencia determinado





Vectores y matrices de componentes

- El vector \mathbf{A} es una entidad geométrica del espacio vectorial \mathbb{R}^3
- Se maneja mediante su matriz de componentes en un sistema de referencia determinado
- Para evitar ambigüedades, se especifica el sistema mediante su vectriz



$$\mathbf{A} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^{\mathbf{A}} =$$

$$= x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^{\mathbf{A}}$$





Configuración del sólido rígido

- Para especificar la configuración de un sólido:
 - Se escoge un punto O del sólido (no necesariamente el CDM)
 - Se le fija un sistema de referencia $S_2 \triangleq Ox_2y_2z_2$

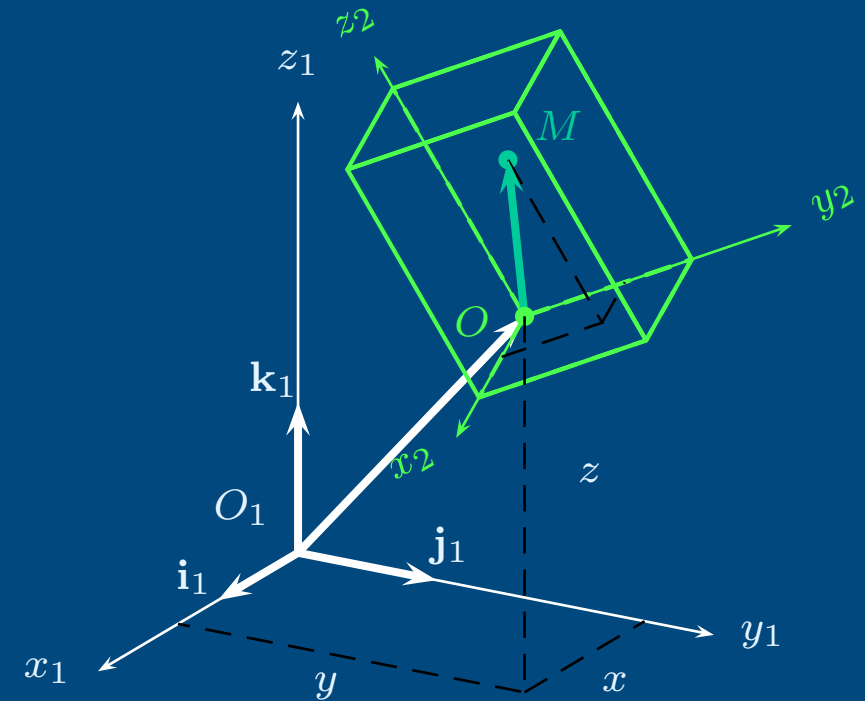




Configuración del sólido rígido

- Para especificar la configuración de un sólido:
 - Se escoge un punto O del sólido (no necesariamente el CDM)
 - Se le fija un sistema de referencia $S_2 \triangleq Ox_2y_2z_2$
- Así, el vector posición de un punto cualquiera M del sólido es:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1\mathbf{M} &= \mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \\ &= x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{k}_1 + \xi\mathbf{i}_2 + \eta\mathbf{j}_2 + \zeta\mathbf{k}_2 = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M \end{aligned}$$





Configuración del sólido rígido

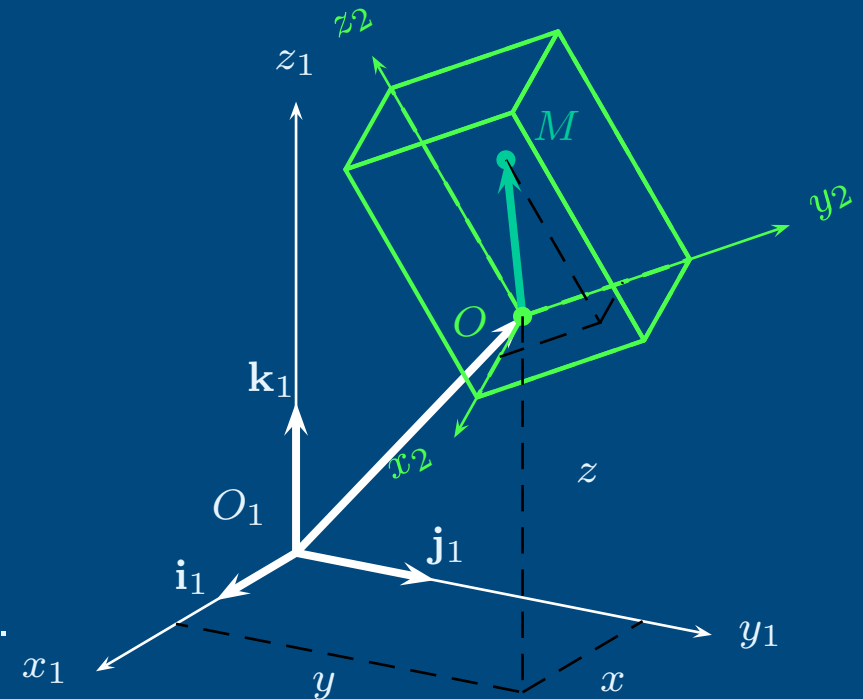
- Para especificar la configuración de un sólido:
 - Se escoge un punto O del sólido (no necesariamente el CDM)
 - Se le fija un sistema de referencia $S_2 \triangleq Ox_2y_2z_2$
- Así, el vector posición de un punto cualquiera M del sólido es:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1\mathbf{M} &= \mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \\ &= x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{k}_1 + \xi\mathbf{i}_2 + \eta\mathbf{j}_2 + \zeta\mathbf{k}_2 = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M \end{aligned}$$

Nótese que

$$X_2^M = [\xi, \eta, \zeta]^T$$

es constante porque M es parte del sólido rígido.
 X_1^O y \mathcal{R}_2 cambian al moverse el sólido.





Matriz de rotación del sólido rígido

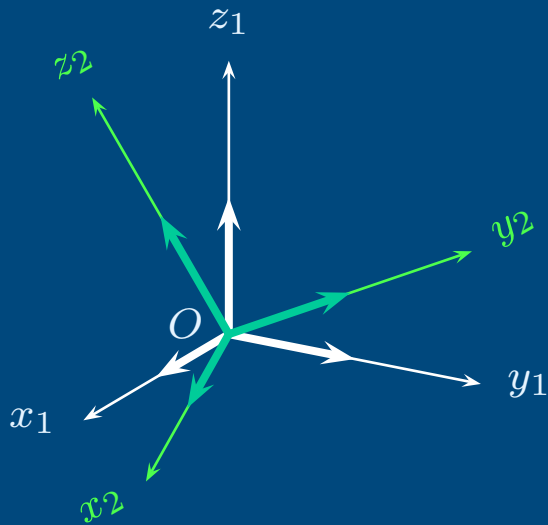
Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ o $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$.





Matriz de rotación del sólido rígido

Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ o $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$.



Los cosenos directores de los versores de \mathcal{R}_2 son

$$\mathbf{i}_2 = (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{j}_2 = (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

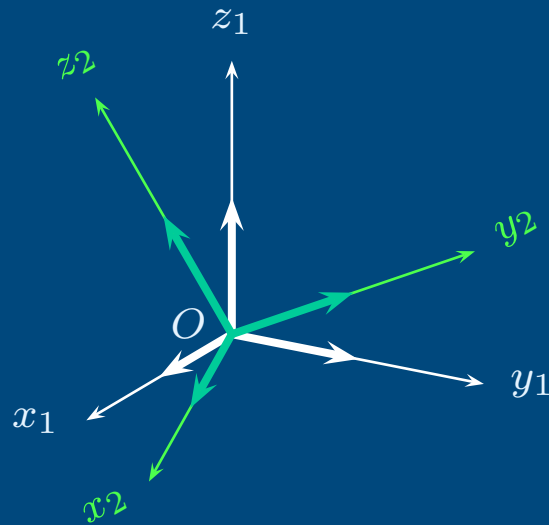
$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$





Matriz de rotación del sólido rígido

Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ o $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$.



Los cosenos directores de los versores de \mathcal{R}_2 son

$$\mathbf{i}_2 = (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{j}_2 = (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

En forma matricial,

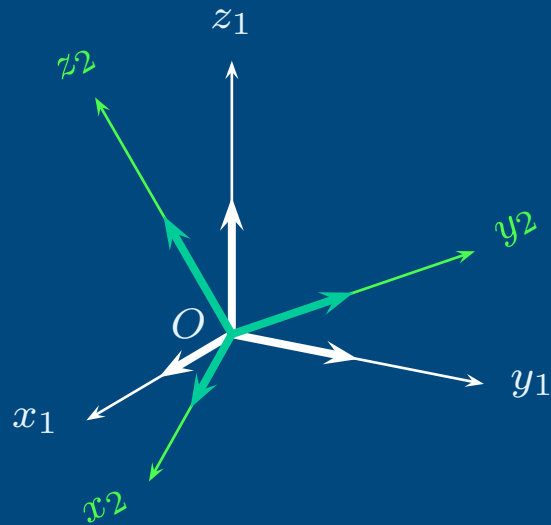
$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ \hline (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ \hline (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{array} \right]$$





Matriz de rotación del sólido rígido

Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ o $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$.



Los cosenos directores de los versores de \mathcal{R}_2 son

$$\mathbf{i}_2 = (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{j}_2 = (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$$

En forma matricial,

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación del sólido S_2 respecto a S_1 :

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{Q}_{12}$$

$$S_1 \xrightarrow{\mathcal{Q}_{12}} S_2$$





Grados de libertad del sólido rígido libre

- Posición de un punto M de S_2 : $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\mathbf{X}_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M \right)$
- \mathbf{X}_2^M es constante: identifica de qué punto del sólido se trata.
- La configuración requiere 12 parámetros: $3 (\mathbf{X}_1^O) + 9 (\mathbf{Q}_{12})$





Grados de libertad del sólido rígido libre

- Posición de un punto M de S_2 : $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\mathbf{X}_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M \right)$
- \mathbf{X}_2^M es constante: identifica de qué punto del sólido se trata.
- La configuración requiere 12 parámetros: $3 (\mathbf{X}_1^O) + 9 (\mathbf{Q}_{12})$
- Solo **3** componentes de \mathbf{Q}_{12} son independientes. Sus columnas son las matrices de componentes de los versores de S_2 , que cumplen **6** condiciones:
 - Ortogonales: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$
 - Unitarios: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 1 \quad \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 1$





Grados de libertad del sólido rígido libre

- Posición de un punto M de S_2 : $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\mathbf{X}_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M \right)$
- \mathbf{X}_2^M es constante: identifica de qué punto del sólido se trata.
- La configuración requiere 12 parámetros: $3 (\mathbf{X}_1^O) + 9 (\mathbf{Q}_{12})$
- Solo **3** componentes de \mathbf{Q}_{12} son independientes. Sus columnas son las matrices de componentes de los versores de S_2 , que cumplen **6** condiciones:
 - Ortogonales: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$
 - Unitarios: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 1 \quad \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 1$
- Un sólido rígido tiene **6** Grados de Libertad:
 - **3** coordenadas de un punto \mathbf{X}_1^O Traslación
 - **3** de la matriz de rotación \mathbf{Q}_{12} Rotación

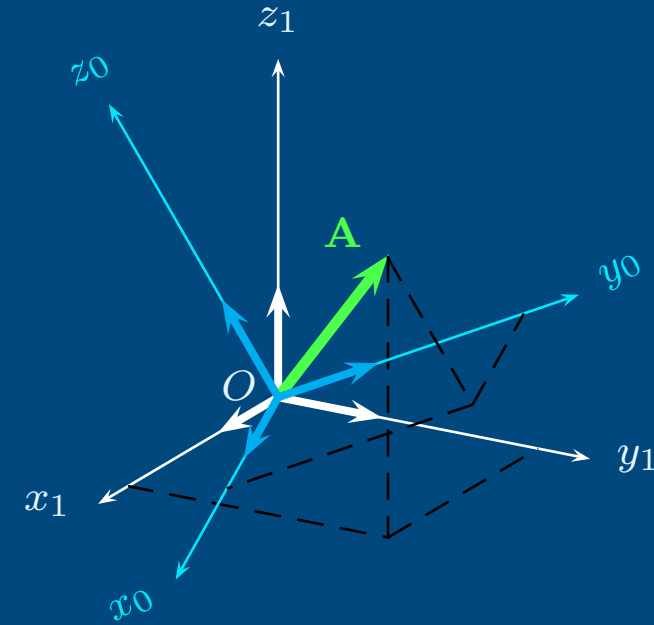




Matriz de giro y cambio de base

Q_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 (\equiv Sólido) respecto a otro S_1 : Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^{\mathbf{A}} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$



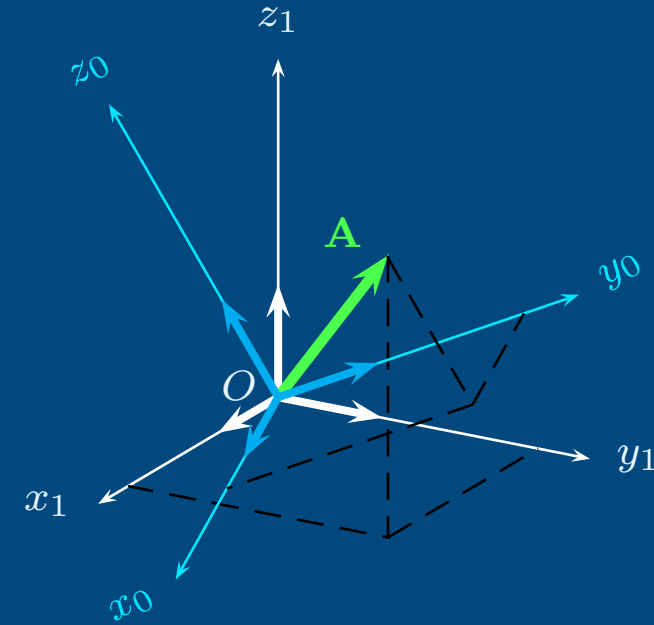


Matriz de giro y cambio de base

Q_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 (\equiv Sólido) respecto a otro S_1 : Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\mathbf{A} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^{\mathbf{A}} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^{\mathbf{A}}$$



Como $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cdot Q_{10}$ $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cdot Q_{10}^T$,

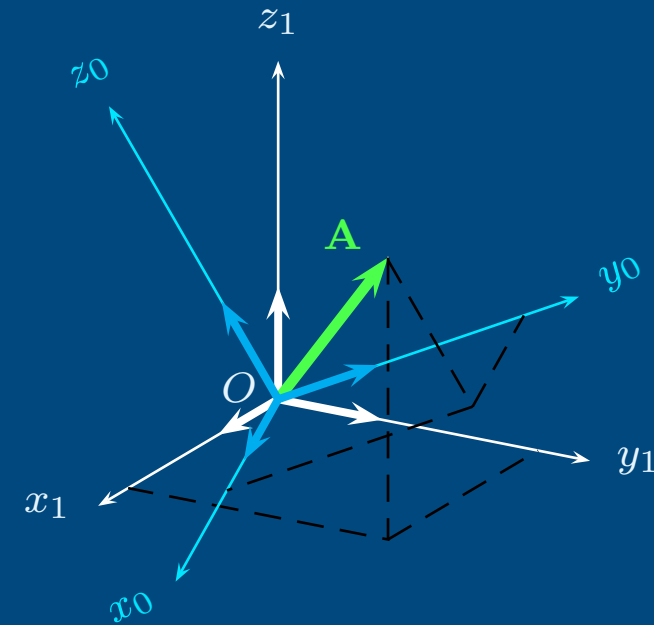




Matriz de giro y cambio de base

Q_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 (\equiv Sólido) respecto a otro S_1 : Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\mathbf{A} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \\ = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A$$



Como $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cdot Q_{10}$ $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cdot Q_{10}^T$,

$$\mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A = \mathcal{R}_1 \cdot Q_{10} \cdot X_0^A \Rightarrow \boxed{X_1^A = Q_{10} \cdot X_0^A}$$

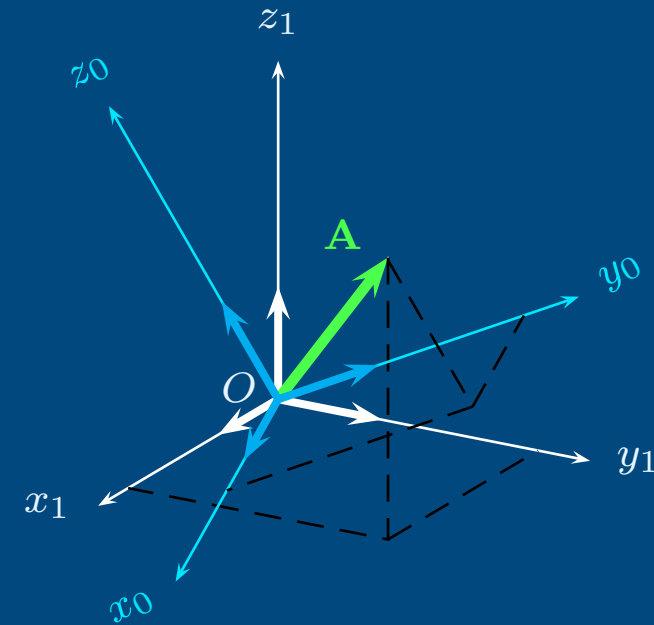




Matriz de giro y cambio de base

Q_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 (\equiv Sólido) respecto a otro S_1 : Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\mathbf{A} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \\ = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A$$



Como $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cdot Q_{10}$ $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cdot Q_{10}^T$,

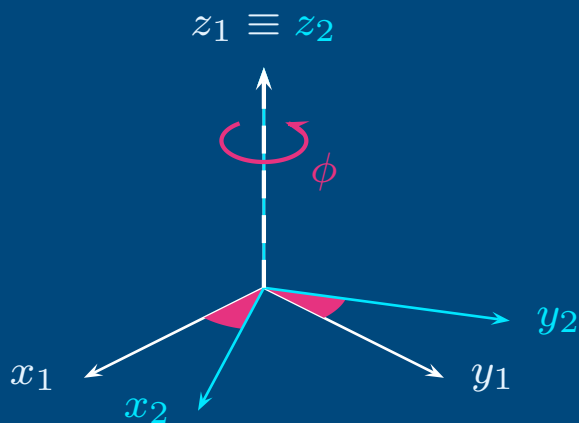
$$\mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A = \mathcal{R}_1 \cdot Q_{10} \cdot X_0^A \Rightarrow \boxed{X_1^A = Q_{10} \cdot X_0^A}$$

$$\mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot Q_{10}^T \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A \Rightarrow \boxed{X_0^A = Q_{10}^T \cdot X_1^A}$$





Giro respecto a un eje fijo



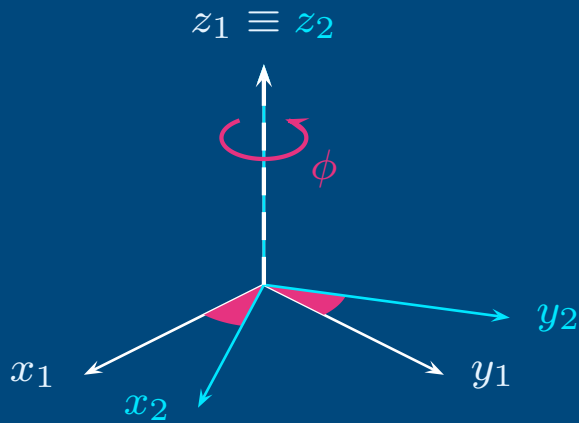
Giro ϕ alrededor del eje Oz : $S_1 \rightarrow S_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= 0 \cdot \mathbf{i}_1 + 0 \cdot \mathbf{j}_1 + 1 \cdot \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$





Giro respecto a un eje fijo



Giro ϕ alrededor del eje Oz : $S_1 \rightarrow S_2$

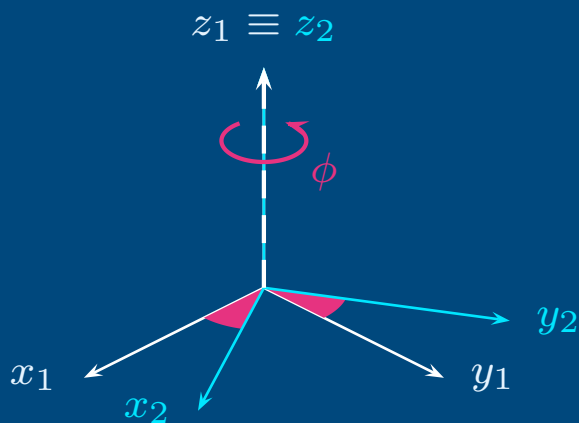
$$\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= 0 \cdot \mathbf{i}_1 + 0 \cdot \mathbf{j}_1 + 1 \cdot \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_2 = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$





Giro respecto a un eje fijo

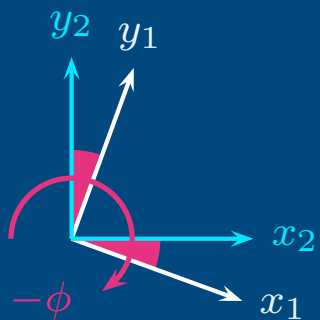


Giro ϕ alrededor del eje Oz : $S_1 \rightarrow S_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= 0 \cdot \mathbf{i}_1 + 0 \cdot \mathbf{j}_1 + 1 \cdot \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_2 = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$

Giro inverso:



$$\begin{aligned} [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] &= [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{21} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \end{aligned}$$





Propiedades de las matrices de giro

- El elemento nulo del grupo de los giros es la matriz unidad:

$$\mathcal{Q}_{11} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Obvio:} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{U}$$





Propiedades de las matrices de giro

- El elemento nulo del grupo de los giros es la matriz unidad:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Obvio:} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{U}$$

- La composición de giros se hace con el producto de matrices:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \rightarrow S_2 : \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \\ S_2 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23} \end{array} \right\}$$

$$S_1 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{13}$$





Propiedades de las matrices de giro

- El elemento nulo del grupo de los giros es la matriz unidad:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Obvio:} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{U}$$

- La composición de giros se hace con el producto de matrices:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \rightarrow S_2 : \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \\ S_2 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23} \end{array} \right\}$$

$$S_1 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{13}$$

- No es conmutativa, pero sí asociativa, como el producto de matrices.

$$\mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \underbrace{(\mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23})}_{\mathbf{Q}_{13}} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \underbrace{(\mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34})}_{\mathbf{Q}_{24}}$$





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & | & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & | & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & | & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & | & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & | & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & | & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ \hline (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ \hline (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{array} \right]$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos
- Las filas, las de los versores fijos en **ejes girados**





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos
- Las filas, las de los versores fijos en **ejes girados**

- Giro inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$:

$$[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos
- Las filas, las de los versores fijos en **ejes girados**

- Giro inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$: Las filas/**columnas** están intercambiadas.

$$[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$





Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos
- Las filas, las de los versores fijos en **ejes girados**

- Giro inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$: Las filas/**columnas** están intercambiadas.

$$[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

La matriz del giro inverso es la traspuesta de la del directo:

$$Q_{12} = Q_{21}^T$$

$$Q_{21} = Q_{12}^T$$





Las matrices de rotación son ortogonales

- Se considera el giro identidad $S_1 \xrightarrow{Q_{11}} S_1$ como composición de un giro $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$ y su inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$

$$Q_{11} = Q_{12} \cdot Q_{21} = Q_{12} \cdot Q_{12}^T = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{12}^{-1} = Q_{12}^T}$$

La matriz inversa de una matriz de giro es su traspuesta .





Las matrices de rotación son ortogonales

- Se considera el giro identidad $S_1 \xrightarrow{Q_{11}} S_1$ como composición de un giro $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$ y su inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$

$$Q_{11} = Q_{12} \cdot Q_{21} = Q_{12} \cdot Q_{12}^T = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{12}^{-1} = Q_{12}^T}$$

La matriz inversa de una matriz de giro es su traspuesta .

- Por esta propiedad Q_{12} es ortogonal. Pertenece a $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) en \mathbb{R}^3 , no conmutativo, con elemento neutro \mathbf{U} y elemento inverso [En la notación de álgebra, $\mathcal{O}^+(3, \mathbb{R})$].





Las matrices de rotación son ortogonales

- Se considera el giro identidad $S_1 \xrightarrow{Q_{11}} S_1$ como composición de un giro $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$ y su inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$

$$Q_{11} = Q_{12} \cdot Q_{21} = Q_{12} \cdot Q_{12}^T = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{12}^{-1} = Q_{12}^T}$$

La matriz inversa de una matriz de giro es su traspuesta .

- Por esta propiedad Q_{12} es **ortogonal**. Pertenece a $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) en \mathbb{R}^3 , no conmutativo, con elemento neutro \mathbf{U} y elemento inverso [En la notación de álgebra, $\mathcal{O}^+(3, \mathbb{R})$].
- Las matrices con $|Q| = -1 \in \mathcal{O}^-(3, \mathbb{R})$. No son matrices de rotación, sino de rotación + **simetría**.
Ej: además de girar un coche, lo transforman en coche inglés.





Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $|Q| = 1$





Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $|Q| = 1$
 - Por ser ortogonales, $|Q \cdot Q^T| = |U| = 1 \rightarrow |Q| = \pm 1$.





Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $|Q| = 1$
 - Por ser ortogonales, $|Q \cdot Q^T| = |U| = 1 \rightarrow |Q| = \pm 1$.
 - Las de rotación,

$$\begin{aligned} |Q_{12}| &= |[i_2 \mid j_2 \mid k_2]| = \left| \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \right| = \\ &= i_2 \cdot (j_2 \wedge k_2) = i_1 \cdot (j_1 \wedge k_1) = +1 \end{aligned}$$

por ser el volumen de un cubo de lado 1.





Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $|Q| = 1$
 - Por ser ortogonales, $|Q \cdot Q^T| = |U| = 1 \rightarrow |Q| = \pm 1$.
 - Las de rotación,

$$|Q_{12}| = |[i_2 | j_2 | k_2]| = \begin{vmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{vmatrix} = i_2 \cdot (j_2 \wedge k_2) = i_1 \cdot (j_1 \wedge k_1) = +1$$

por ser el volumen de un cubo de lado 1.

$$\begin{aligned} |Q - U| &= |Q - Q \cdot Q^T| = |Q| \cdot |U - Q^T| = |U - Q^T| = \\ &= |U - Q| = -|Q - U| \Rightarrow |Q - U| = 0 \end{aligned}$$





Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen
 - $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |Q_{12}| = 1$





Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen

- $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\mathbf{Q}_{12}| = 1$

- $\mathbf{Q}_{12} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$; $\bar{\mathbf{u}}_i^T \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Q}_{12}}_{\mathbf{U}} \mathbf{u}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{u}}_i^T \cdot \mathbf{u}_i \Rightarrow \lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$





Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen

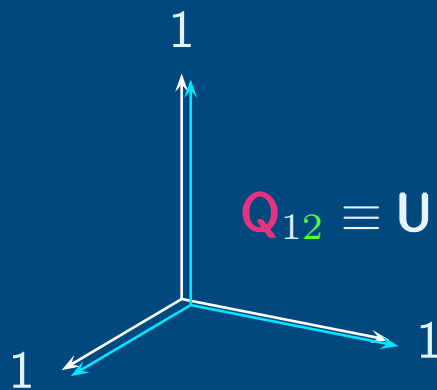
- $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\mathbf{Q}_{12}| = 1$

- $\mathbf{Q}_{12} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$; $\bar{\mathbf{u}}_i^T \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Q}_{12}}_{\mathbf{U}} \mathbf{u}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{u}}_i^T \cdot \mathbf{u}_i \Rightarrow \lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$

- Autovalores posibles:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

trivial: $\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{U}$





Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen

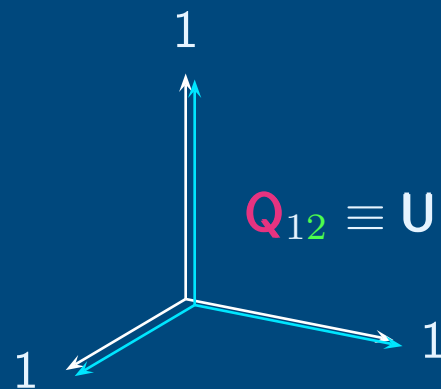
- $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\mathbf{Q}_{12}| = 1$

- $\mathbf{Q}_{12} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$; $\bar{\mathbf{u}}_i^T \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Q}_{12}}_{\mathbf{U}} \mathbf{u}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{u}}_i^T \cdot \mathbf{u}_i \Rightarrow \lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$

- Autovalores posibles:

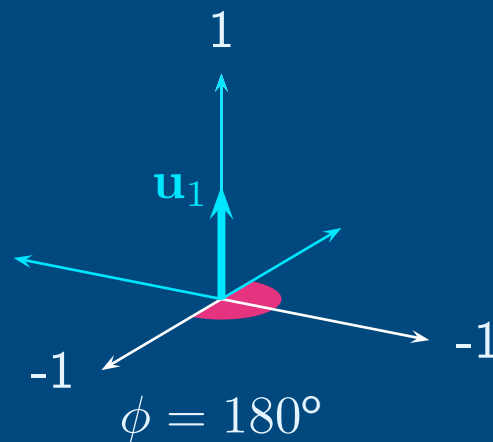
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

trivial: $\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{U}$



$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

giro de 180° alrededor de \mathbf{u}_1





Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen

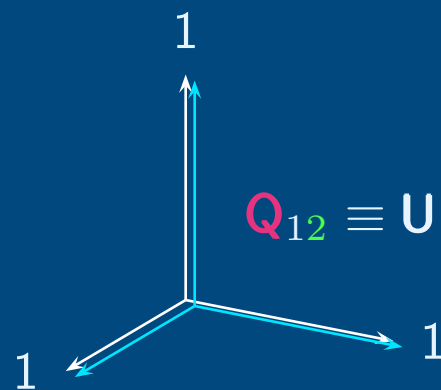
- $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\mathbf{Q}_{12}| = 1$

- $\mathbf{Q}_{12} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$; $\bar{\mathbf{u}}_i^T \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Q}_{12}}_{\mathbf{U}} \mathbf{u}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{u}}_i^T \cdot \mathbf{u}_i \Rightarrow \lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$

- Autovalores posibles:

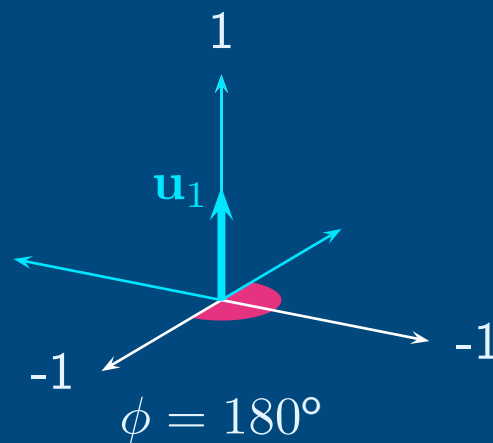
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

trivial: $\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{U}$



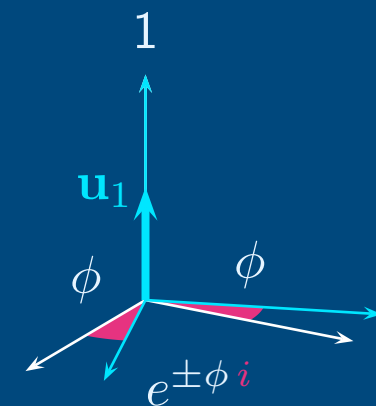
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

giro de 180° alrededor de \mathbf{u}_1



$$\lambda_1 = 1, \lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$$

giro ϕ alrededor de \mathbf{u}_1





Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.





Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
 - Eje: dirección del autovector \mathbf{u}_1 asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de \mathbf{Q}_{12}





Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
 - Eje: dirección del autovector \mathbf{u}_1 asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de \mathbf{Q}_{12}
 - Ángulo de giro: exponente ϕ del par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{2,3} = e^{\pm\phi i}$ de \mathbf{Q}_{12}





Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
 - Eje: dirección del autovector \mathbf{u}_1 asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de \mathbf{Q}_{12}
 - Ángulo de giro: exponente ϕ del par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{2,3} = e^{\pm\phi i}$ de \mathbf{Q}_{12}

- Parametrización del giro \mathbf{Q}_{12} : (9)

- Parámetros eje-ángulo de Euler: $\phi, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}$ (4)

- Vector principal de rotación: $\phi = \phi \mathbf{a}$ (3)

- Vector de Gibbs: $\mathbf{g} = \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{a}$ (3)

- Cuaternios: $\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{a} \right)$ (4)

- Ángulos de Euler: ψ, θ, φ (3)





Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
 - Eje: dirección del autovector \mathbf{u}_1 asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de \mathbf{Q}_{12}
 - Ángulo de giro: exponente ϕ del par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{2,3} = e^{\pm\phi i}$ de \mathbf{Q}_{12}
- Parametrización del giro \mathbf{Q}_{12} : (9)
 - Parámetros eje-ángulo de Euler: $\phi, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}$ (4)
 - Vector principal de rotación: $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{a}$ (3)
 - Vector de Gibbs: $\mathbf{g} = \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{a}$ (3)
 - Cuaternios: $\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{a} \right)$ (4)
 - Ángulos de Euler: ψ, θ, φ (3)
- Todas las parametrizaciones mínimas (3) tienen alguna singularidad





Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 grados de libertad
- La matriz de giro tiene 3 parámetros independientes





Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 grados de libertad
- La matriz de giro tiene 3 parámetros independientes
- Q se puede formar con 3 giros independientes sucesivos:

$$1 \xrightarrow{\psi} 2 \xrightarrow{\theta} 3 \xrightarrow{\phi} 4 \quad Q_{14} = Q_{12} \cdot Q_{23} \cdot Q_{34}$$





Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 **grados de libertad**
- La matriz de giro tiene 3 parámetros **independientes**
- **Q** se puede formar con 3 giros independientes sucesivos:

$$1 \xrightarrow{\psi} 2 \xrightarrow{\theta} 3 \xrightarrow{\phi} 4 \quad Q_{14} = Q_{12} \cdot Q_{23} \cdot Q_{34}$$

- 2º y 3º giros alrededor de las **nuevas** posiciones de los ejes
- Se pueden repetir ejes, pero no seguidos (sería el mismo)





Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 grados de libertad
- La matriz de giro tiene 3 parámetros independientes
- Q se puede formar con 3 giros independientes sucesivos:

$$1 \xrightarrow{\psi} 2 \xrightarrow{\theta} 3 \xrightarrow{\phi} 4 \quad Q_{14} = Q_{12} \cdot Q_{23} \cdot Q_{34}$$

- 2º y 3º giros alrededor de las nuevas posiciones de los ejes
- Se pueden repetir ejes, pero no seguidos (sería el mismo)
- 12 combinaciones posibles¹. Más comunes:

zxz	Ángulos de Euler clásicos	Maquinaria, Astronomía
zyz		Mecánica cuántica
zyx	Tait-Bryan	Mecánica del vuelo
xyz		VisualNastran (+), Maple (-)

¹cfr. Peter C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, p. 20.





Matriz de giro con ángulos de Euler

$$\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\theta} \mathcal{R}_3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{R}_4$$

- **Precesión:** Giro ψ alrededor de $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}_2$
- **Nutación:** Giro θ alrededor de $\mathbf{i}_2 \equiv \mathbf{i}_3$ (Eje de nodos)
- **Rotación propia:** Giro ϕ alrededor del eje $\mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{k}_4$

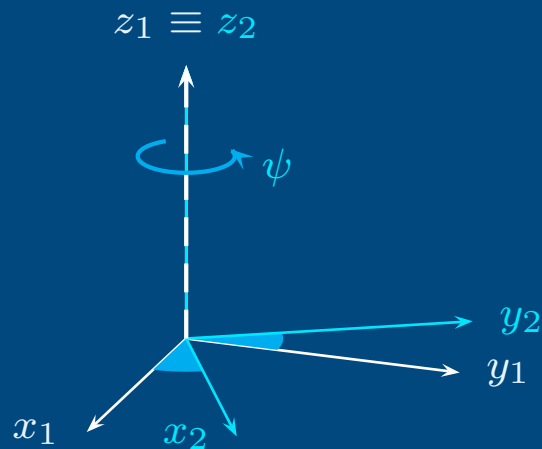




Matriz de giro con ángulos de Euler

$$\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\theta} \mathcal{R}_3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{R}_4$$

- **Precesión:** Giro ψ alrededor de $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}_2$
- **Nutación:** Giro θ alrededor de $\mathbf{i}_2 \equiv \mathbf{i}_3$ (Eje de nodos)
- **Rotación propia:** Giro ϕ alrededor del eje $\mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{k}_4$



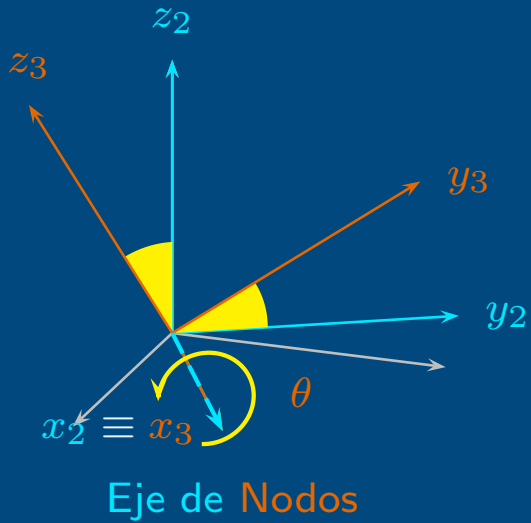
Precesión

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$





Matriz de giro con ángulos de Euler



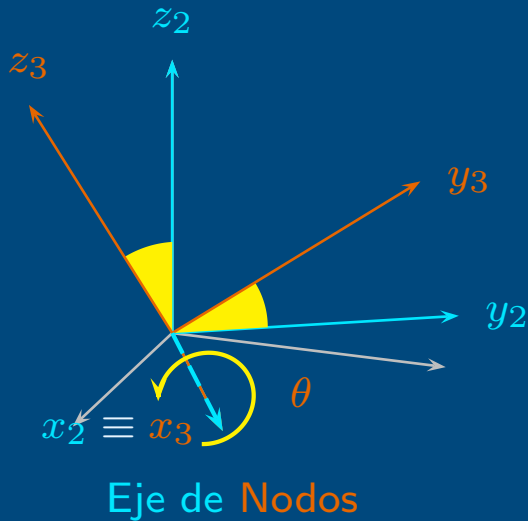
Nutación

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{Q}_{23}$$



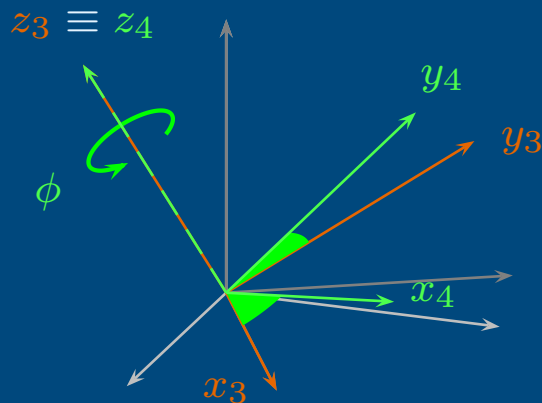


Matriz de giro con ángulos de Euler



Nutación

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{Q}_{23}$$



Rotación propia

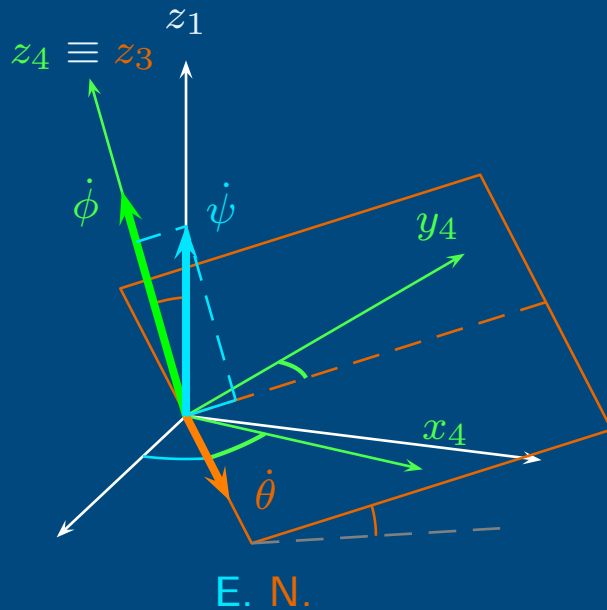
$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3 \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3 \cdot \mathcal{Q}_{34}$$



Matriz de giro con ángulos de Euler

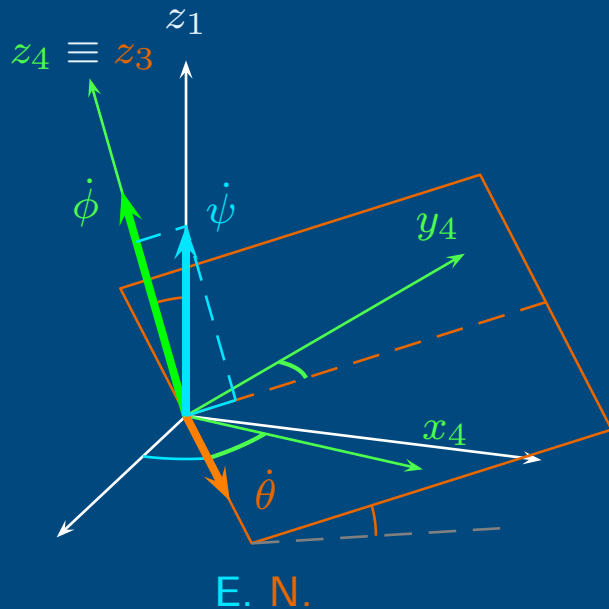
Para hallar la matriz del giro global, aplicamos la composición de giros sucesivos,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_4 &= \underbrace{\mathcal{R}_3} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \underbrace{\mathcal{R}_2} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \\
 &= \underbrace{\mathcal{R}_1} \cdot \mathcal{Q}_{12} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{Q}_{14}
 \end{aligned}$$





Matriz de giro con ángulos de Euler



Para hallar la matriz del giro global, aplicamos la composición de giros sucesivos,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 &= \underbrace{\mathcal{R}_3} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \underbrace{\mathcal{R}_2} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \\ &= \underbrace{\mathcal{R}_1} \cdot \mathcal{Q}_{12} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{Q}_{14} \end{aligned}$$

Calculando el producto de las tres, se obtiene \mathcal{Q}_{14} :

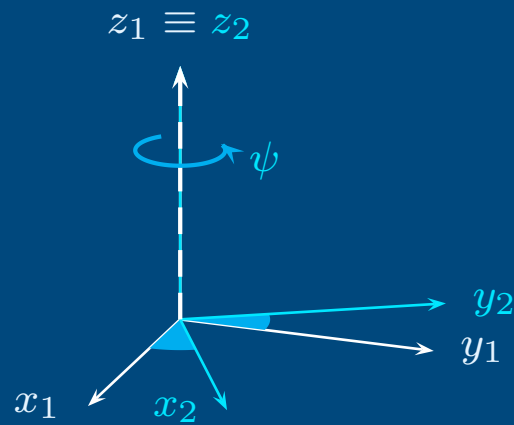
$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$



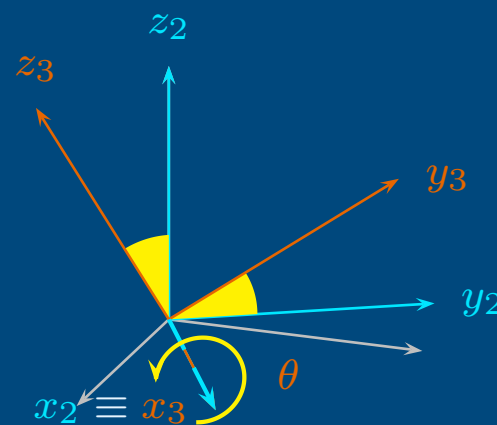


Ángulos de Euler clásicos / Tait-Bryan

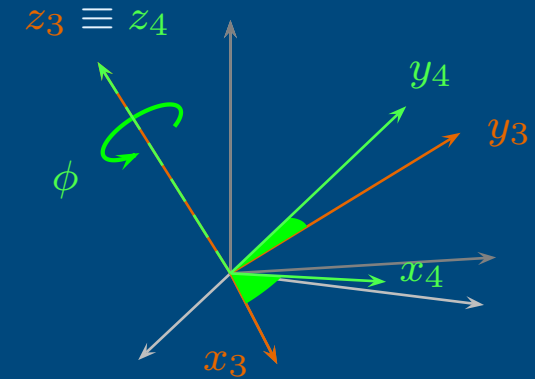
Euler clásicos



Precesión

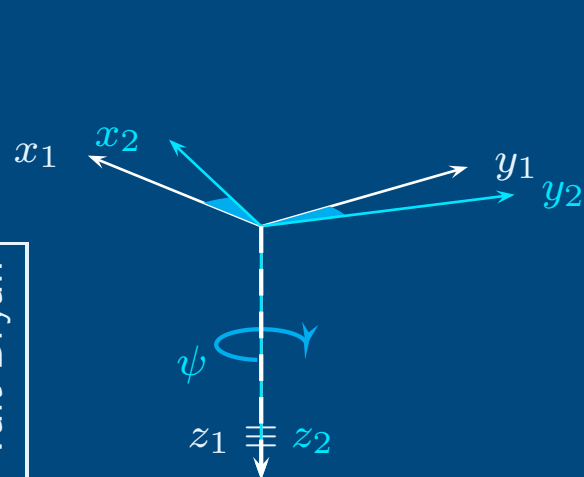


Nutación

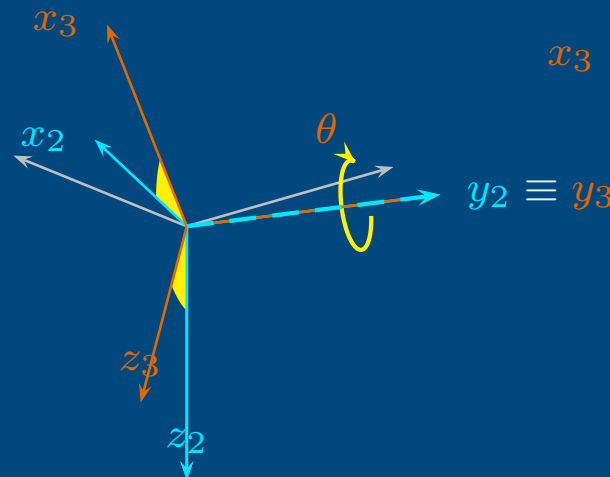


Rotación propia

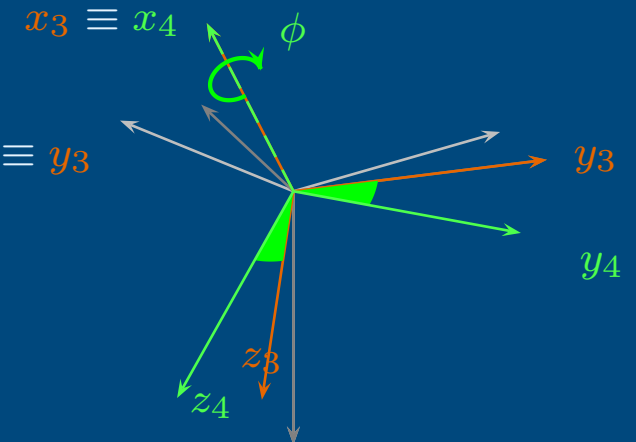
Tait-Bryan



Yaw



Pitch



Roll

Nota: los anglosajones suelen intercambiar la ψ y la ϕ .





Sistemas de representación de la actitud

Sistema	Pros	Contras	Aplicaciones
ϕ, θ, ψ	Mínimo Intuitivo Máquinas	Singular en $\theta = 0$ Muchos sin/cos Composición difícil	Docencia, M. Orbital Pre/Postprocesado Máquinas, Robots
g	Mínimo No sin/cos Composición fácil	∞ para π No intuitivo	Analítico
q	Regular No sin/cos Composición fácil Normalizable (\uparrow)	1 redundante No intuitivo	Sistemas de control de actitud (ACS) a bordo
ϕ, a	Intuitivo	1 redundante Singular en 0 Algunos sin/cos Composición difícil	Rotaciones sobre eje fijo
Q	Regular No sin/cos Normalizable (\downarrow)	6 redundantes	Analítico Cambio de ejes Multibody





Campo de velocidades

Velocidad de un punto del sólido

Tensor velocidad angular

Propiedades del tensor velocidad angular

Campo de velocidades del sólido

Propiedades del campo de velocidades del sólido

Propiedades del campo de velocidades: **Axoides**

Axoides: ejemplos

Determinación de la velocidad angular

Aceleración de un punto de un sólido

Aceleración angular de un sólido

Estructura del campo de aceleraciones

Resumen de propiedades cinemáticas

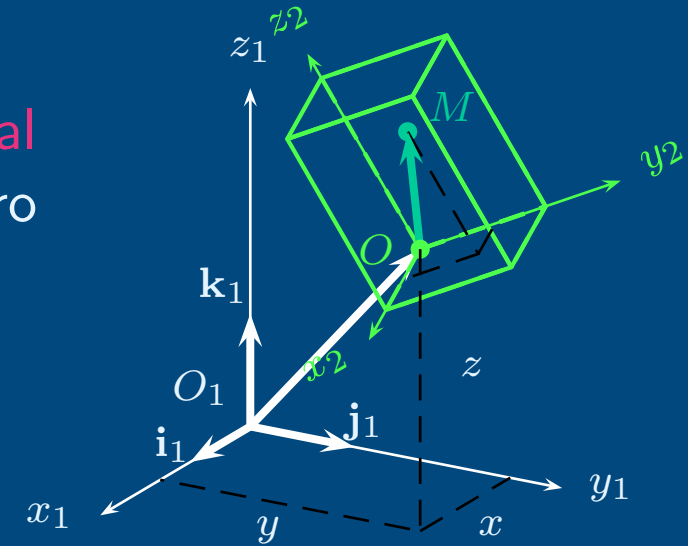




Velocidad de un punto del sólido

Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 : la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot (X_1^O + Q_{12} \cdot X_2^M)$$





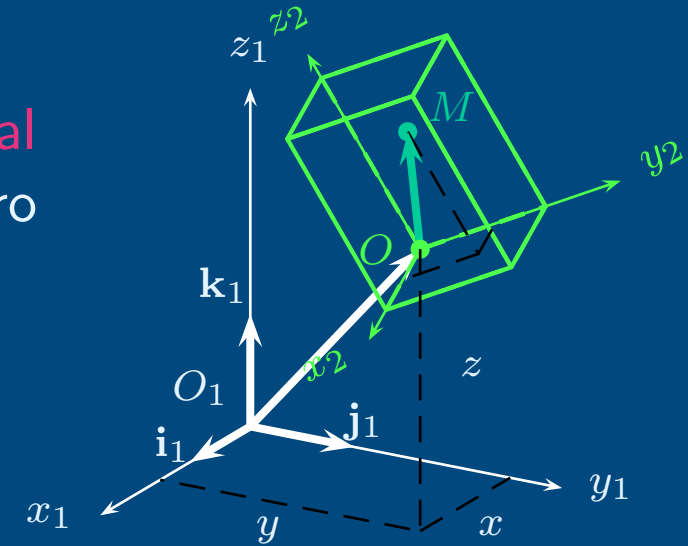
Velocidad de un punto del sólido

Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 : la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot (X_1^O + Q_{12} \cdot X_2^M)$$

y su derivada (con \mathcal{R}_1 constante) es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \dot{Q}_{12} \cdot X_2^M \right) = \mathbf{v}_{21}^M|_{trans} + \mathbf{v}_{21}^M|_{rot}$$





Velocidad de un punto del sólido

Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 : la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

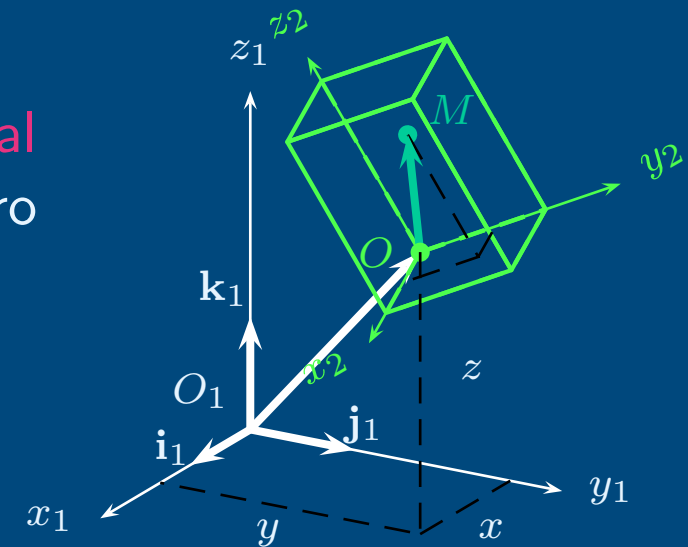
$$\mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot (X_1^O + Q_{12} \cdot X_2^M)$$

y su derivada (con \mathcal{R}_1 constante) es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \dot{Q}_{12} \cdot X_2^M \right) = \mathbf{v}_{21}^M|_{trans} + \mathbf{v}_{21}^M|_{rot}$$

Para entender la relación entre \mathbf{OM} y su derivada debido a la rotación, hay que proyectarlos en los mismos ejes, fijos o sólido:

$$\dot{\mathbf{OM}} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{Q}_{12} \cdot X_2^M = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{Q}_{12} \cdot \overbrace{Q_{12}^T \cdot X_1^M}^{X_2^M} = \overbrace{\mathcal{R}_2 \cdot Q_{12}^T}^{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{Q}_{12} \cdot X_2^M$$





Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{X}_2^M$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1 , expresado por su matriz de componentes en S_2 .





Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{X}_2^M$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1 , expresado por su matriz de componentes en S_2 .

- En ejes fijos, el tensor se expresa

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \mathbf{X}_1^M = \mathcal{R}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot \mathbf{X}_1^M$$





Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{X}_2^M$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1 , expresado por su matriz de componentes en S_2 .

- En ejes fijos, el tensor se expresa

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \mathbf{X}_1^M = \mathcal{R}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot \mathbf{X}_1^M$$

- Los dos están relacionados por las ecuaciones de cambio de ejes,

$$\boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T$$

que es el 1^{er} criterio de tensorialidad $\Rightarrow \boldsymbol{\Omega}_{21}$ es un tensor.





Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{X}_2^M$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1 , expresado por su matriz de componentes en S_2 .

- En ejes fijos, el tensor se expresa

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \mathbf{X}_1^M = \mathcal{R}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot \mathbf{X}_1^M$$

- Los dos están relacionados por las ecuaciones de cambio de ejes,

$$\boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T$$

que es el 1^{er} criterio de tensorialidad $\Rightarrow \boldsymbol{\Omega}_{21}$ es un tensor.

- Aplicación lineal: $\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{OM}$ o $\mathbf{OM} \xrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{21}} \mathbf{v}_{21}^M|_{rot}$





Propiedades del tensor velocidad angular

- El tensor velocidad angular es antisimétrico:

$$Q_{12}^T Q_{12} = U \quad \dot{Q}_{12}^T Q_{12} + Q_{12}^T \dot{Q}_{12} = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right)^T + Q_{12}^T \dot{Q}_{12} = 0$$





Propiedades del tensor velocidad angular

- El tensor velocidad angular es antisimétrico:

$$\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Q}_{12} = \mathbf{U} \quad \dot{\mathbf{Q}}_{12}^T \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \left(\mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} \right)^T + \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \mathbf{0}$$

- Un tensor antisimétrico tiene un **Vector axial** asociado $\boldsymbol{\omega}_{21}$ (pseudovector):

$$\boldsymbol{\Omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21} \Big|_i \cdot X_i^M \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$$



Propiedades del tensor velocidad angular

- El tensor velocidad angular es antisimétrico:

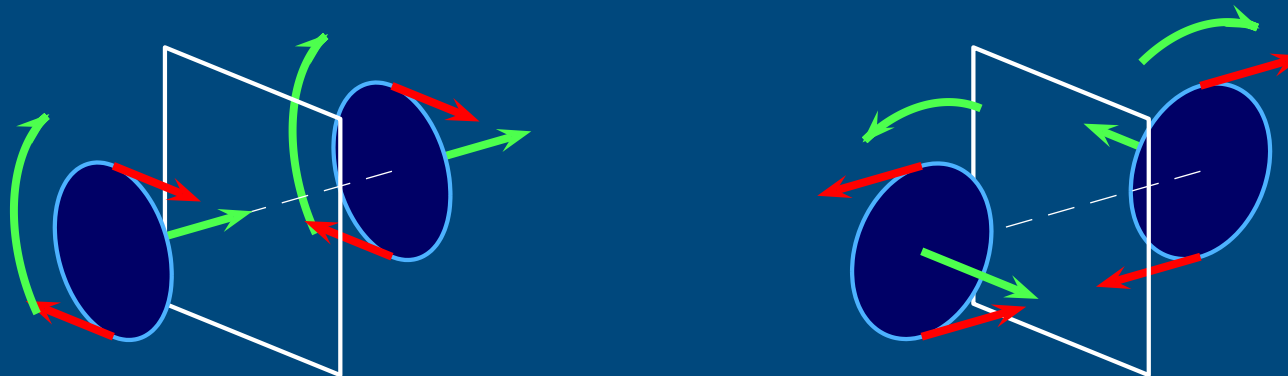
$$Q_{12}^T Q_{12} = U \quad \dot{Q}_{12}^T Q_{12} + Q_{12}^T \dot{Q}_{12} = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right)^T + Q_{12}^T \dot{Q}_{12} = 0$$

- Un tensor antisimétrico tiene un **Vector axial** asociado ω_{21} (pseudovector):

$$\Omega_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \omega_{21} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i \cdot \Omega_{21} \Big|_i \cdot X_i^M \Leftrightarrow \omega_{21} \wedge OM$$

- Vector **Polar** / **Axial**: el comportamiento ante simetrías cambia con la orientación de los ejes (a derechas/a izquierdas)

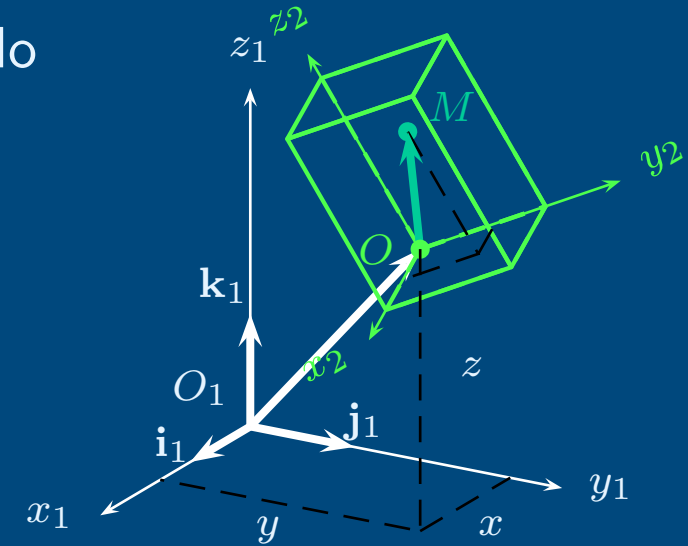




Campo de velocidades del sólido

- Vector velocidad del punto (arbitrario) M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot X_1^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \left(\mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot X_2^M \right) = \\ &= \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} \end{aligned}$$

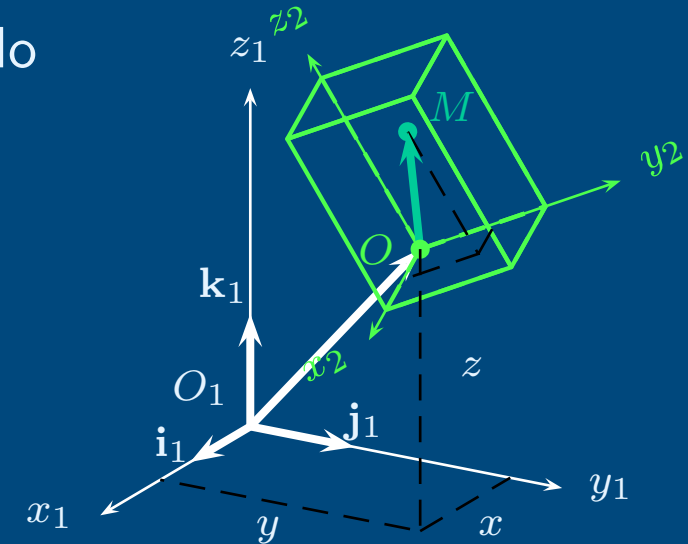




Campo de velocidades del sólido

- Vector velocidad del punto (arbitrario) M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot X_1^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \left(\mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot X_2^M \right) = \\ &= \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} \end{aligned}$$



- Vale para cualquier par de puntos: O y M son arbitrarios,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OB} = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\mathbf{OA} + \mathbf{AB}) = \rightarrow$$

Campo de velocidades:

\rightarrow

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

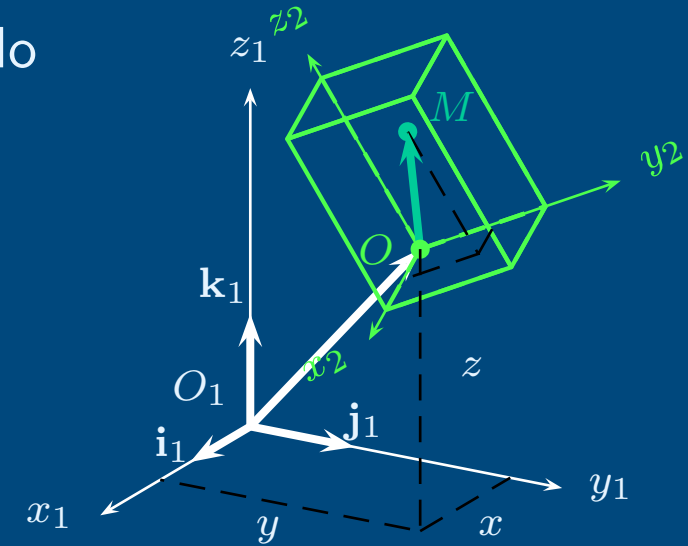




Campo de velocidades del sólido

- Vector velocidad del punto (arbitrario) M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot X_1^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \left(\mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot X_2^M \right) = \\ &= \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} \end{aligned}$$



- Vale para cualquier par de puntos: O y M son arbitrarios,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OB} = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\mathbf{OA} + \mathbf{AB}) = \rightarrow$$

Campo de velocidades:

\rightarrow

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

- 6 GDL \rightarrow 6 parámetros determinan el estado cinemático de todos los puntos del sólido: \dot{X}_1^O (3) y $\boldsymbol{\Omega}_{21} / \boldsymbol{\omega}_{21}$ (3)





Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas:

$$\omega_{21} \wedge \mathbf{OM} \quad / \quad \Omega_{21}|_2 \cdot X_2^M$$





Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas:

$$\omega_{21} \wedge \mathbf{OM} / \Omega_{21}|_2 \cdot X_2^M$$

- Si $\omega_{21} = \mathbf{0}$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (**traslación pura** o **traslación paralela**)





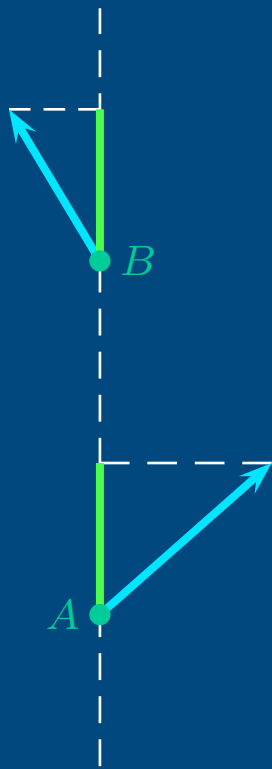
Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas:

$$\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} / \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot X_2^M$$

- Si $\boldsymbol{\omega}_{21} = \mathbf{0}$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (traslación **pura** o traslación paralela)

- Equiproyectividad: $\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$





Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas:

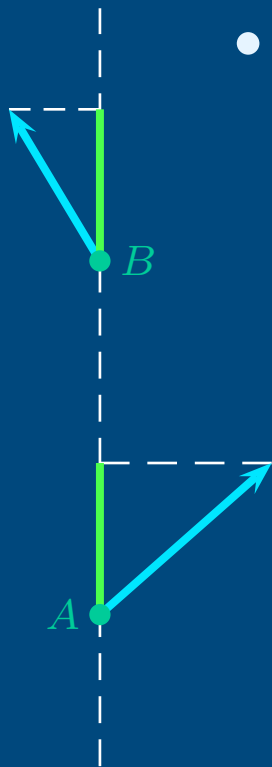
$$\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} \quad / \quad \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot X_2^M$$

- Si $\boldsymbol{\omega}_{21} = \mathbf{0}$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (**traslación pura** o **traslación paralela**)

- **Equiproyectividad**: $\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$

- Por la definición de sólido, la distancia entre puntos es constante:

$$(\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = \text{Cte.} \quad \rightarrow \quad (\dot{\mathbf{r}}^B - \dot{\mathbf{r}}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = 0$$





Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas: $\omega_{21} \wedge \mathbf{OM} / \Omega_{21}|_2 \cdot X_2^M$
- Si $\omega_{21} = 0$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (**traslación pura** o traslación paralela)
- Equiproyectividad: $\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$

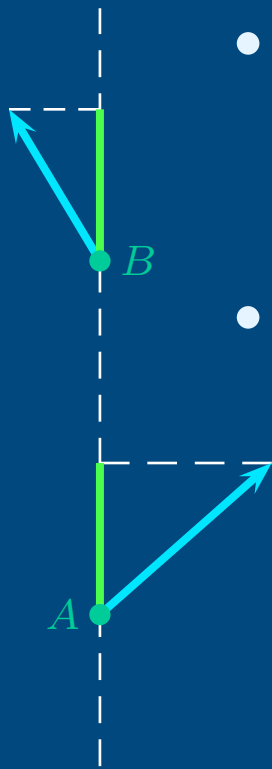
- Por la definición de sólido, la distancia entre puntos es constante:

$$(\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = \text{Cte.} \quad \rightarrow \quad (\dot{\mathbf{r}}^B - \dot{\mathbf{r}}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = 0$$

- Implícito en la expresión del campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = (\mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AB}) \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$$

porque se obtiene girando un sistema de referencia, que cumple la condición de sólido. Los puntos no pueden alejarse ni acercarse, solo girar (si no, se deformaría).





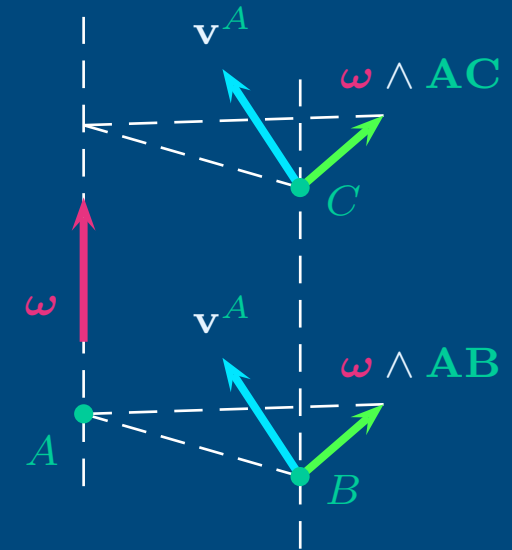
Propiedades del campo de velocidades

- Bidimensional: Igual velocidad en rectas $\parallel \omega$

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \lambda \omega_{21}$$

$$\mathbf{v}_{21}^C = \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AC} =$$

$$= \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge (\mathbf{AB} + \lambda \omega_{21}) \parallel \mathbf{v}_{21}^B$$





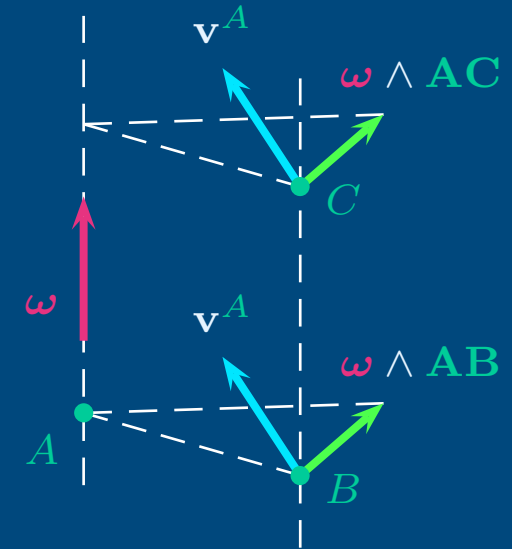
Propiedades del campo de velocidades

- Bidimensional: Igual velocidad en rectas $\parallel \omega$

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \lambda \omega_{21}$$

$$\mathbf{v}_{21}^C = \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AC} =$$

$$= \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge (\mathbf{AB} + \lambda \omega_{21}) \parallel \mathbf{v}_{21}^B$$

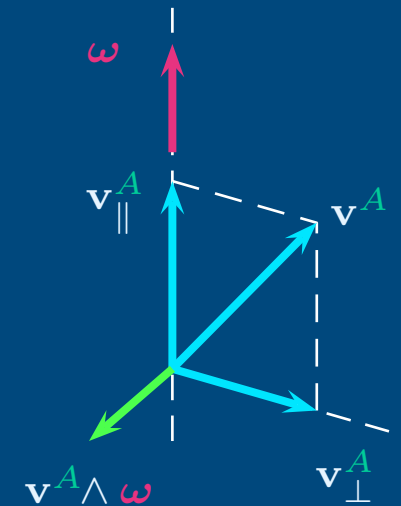


- Descomposición en velocidades \parallel y \perp a ω

$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\frac{\mathbf{v}^A \cdot \omega}{\omega^2} \omega}_{\parallel} + \underbrace{\frac{\omega \wedge (\mathbf{v}^A \wedge \omega)}{\omega^2}}_{\perp}$$

del desarrollo del producto triple:

$$\omega \wedge (\mathbf{v}^A \wedge \omega) = \omega^2 \mathbf{v}^A - (\mathbf{v}^A \cdot \omega) \omega$$





Propiedades del campo de velocidades

- **Velocidad de mínimo deslizamiento**: la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (equiproyectividad según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$





Propiedades del campo de velocidades

- **Velocidad de mínimo deslizamiento**: la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (equiproyectividad según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$

- Es constante para todo el sólido

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \omega_{21} = \left(\mathbf{v}_{21}^A + \cancel{\omega_{21} \wedge \overline{AB}} \right) \cdot \omega_{21} = \mathbf{v}^D \cdot \omega_{21} \quad \forall A, B \in S_2$$





Propiedades del campo de velocidades

- **Velocidad de mínimo deslizamiento**: la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (equiproyectividad según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$

- Es constante para todo el sólido

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \omega_{21} = (\mathbf{v}_{21}^A + \cancel{\omega_{21} \wedge \overline{AB}}) \cdot \omega_{21} = \mathbf{v}^D \cdot \omega_{21} \quad \forall A, B \in S_2$$

- Si es nula, el movimiento es una **rotación pura**
- Basta dar el escalar v^D , porque su dirección es conocida





Propiedades del campo de velocidades

- **Velocidad de mínimo deslizamiento**: la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (equiproyectividad según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$

- Es constante para todo el sólido

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \omega_{21} = (\mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \overset{\perp}{\wedge} \mathbf{AB}) \cdot \omega_{21} = \mathbf{v}^D \cdot \omega_{21} \quad \forall A, B \in S_2$$

- Si es nula, el movimiento es una **rotación pura**
- Basta dar el escalar v^D , porque su dirección es conocida
- Es la velocidad mínima en módulo de todo el campo de velocidades

$$|\mathbf{v}^A|^2 = \underbrace{|\mathbf{v}_{\parallel}^A|^2}_{\text{Cte.}} + \underbrace{|\mathbf{v}_{\perp}^A|^2}_{\geq 0}$$





Propiedades del campo de velocidades

- Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento: Hay una recta del sólido en que v_{\perp} se anula, $v^H = v_{\parallel}^H = v^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$

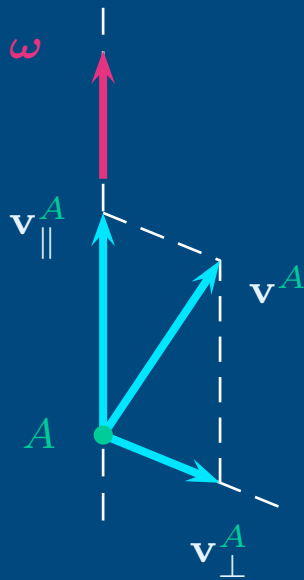




Propiedades del campo de velocidades

- **Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:** Hay una recta del sólido en que \mathbf{v}_\perp se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}_\parallel^H = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$ A partir de A , buscamos un punto H del **E.I.R.** tal que $\mathbf{AH} \perp \boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^H &= \mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) = \mathbf{0} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AH}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AH} \quad \rightarrow \end{aligned}$$

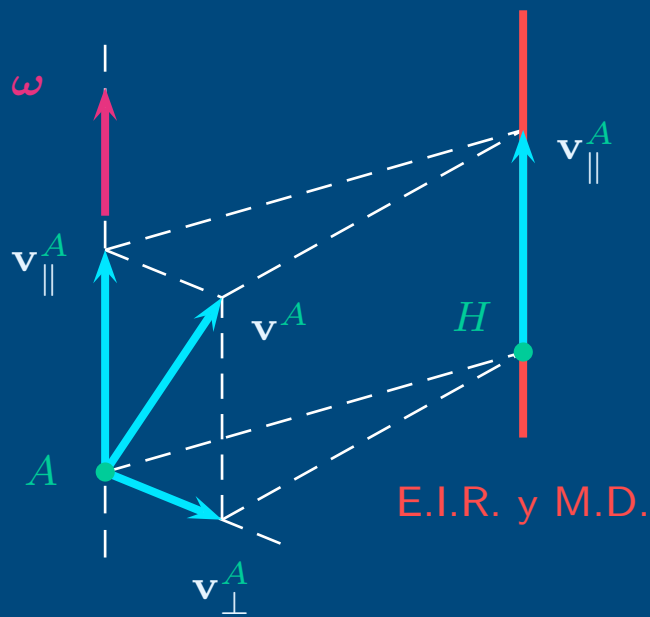




Propiedades del campo de velocidades

- **Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:** Hay una recta del sólido en que \mathbf{v}_\perp se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}_\parallel^H = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$ A partir de A , buscamos un punto H del **E.I.R.** tal que $\mathbf{AH} \perp \boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^H &= \mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) = \mathbf{0} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AH}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AH} \quad \rightarrow \quad \mathbf{AH} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} \end{aligned}$$



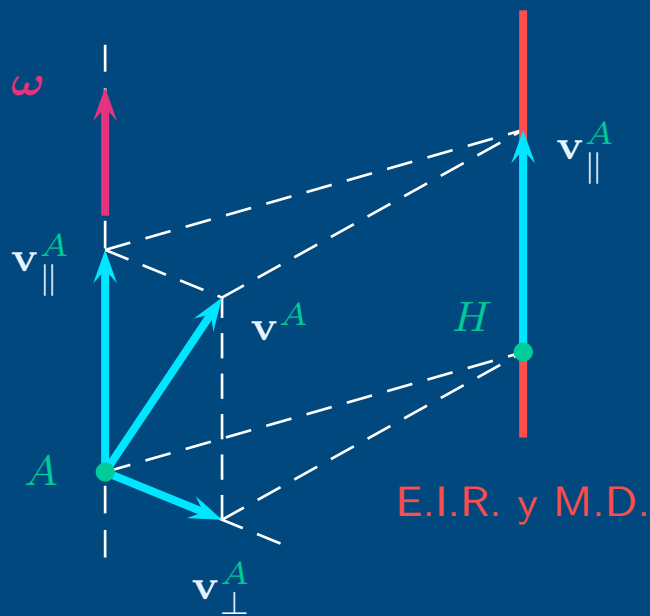


Propiedades del campo de velocidades

- **Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:** Hay una recta del sólido en que \mathbf{v}_\perp se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}_\parallel^H = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$ A partir de A , buscamos un punto H del **E.I.R.** tal que $\mathbf{AH} \perp \boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^H &= \mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) = \mathbf{0} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AH}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AH} \quad \rightarrow \quad \mathbf{AH} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}^{\text{E.I.R.}} = \mathbf{r}^A + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}$$



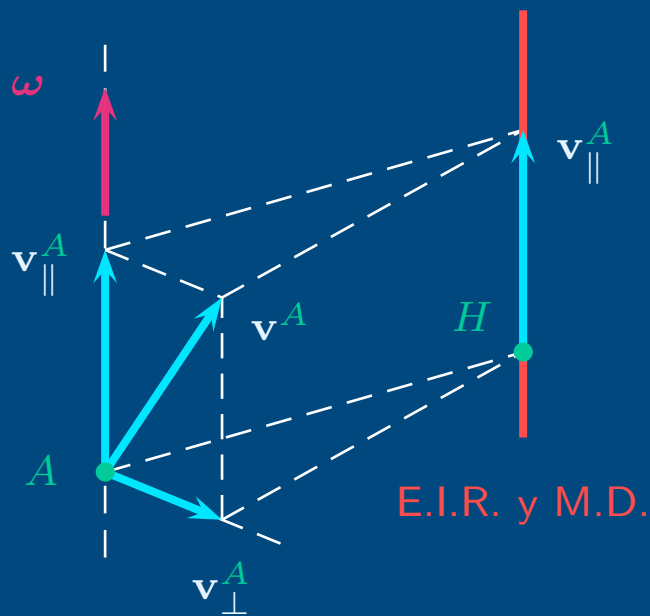


Propiedades del campo de velocidades

- **Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:** Hay una recta del sólido en que \mathbf{v}_\perp se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}_\parallel^H = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$ A partir de A , buscamos un punto H del **E.I.R.** tal que $\mathbf{AH} \perp \boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^H &= \mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) = \mathbf{0} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AH}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AH} \quad \rightarrow \quad \mathbf{AH} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}^{\text{E.I.R.}} = \mathbf{r}^A + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}$$



- Todos los puntos del **E.I.R. y Mínimo Deslizamiento** tienen la misma velocidad, \mathbf{v}^D , que es la velocidad mínima del campo de velocidades.





Propiedades del campo de velocidades

- **Movimiento helicoidal equivalente:** se toma un punto H del **E.I.R.** para describir el campo de velocidades.

$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\mathbf{v}^H}_{\parallel} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{HA}}_{\perp} = \text{Deslizamiento} + \text{Rotación pura}$$



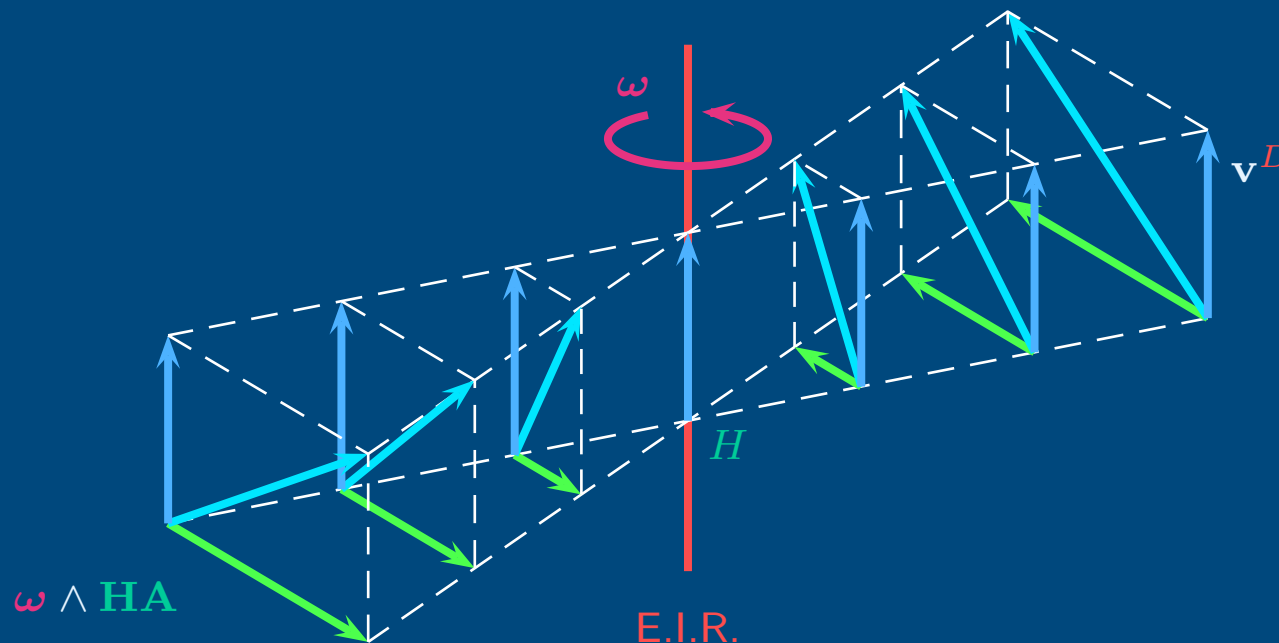


Propiedades del campo de velocidades

- **Movimiento helicoidal equivalente:** se toma un punto H del E.I.R. para describir el campo de velocidades.

$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\mathbf{v}^H}_{\parallel} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{HA}}_{\perp} = \text{Deslizamiento} + \text{Rotación pura}$$

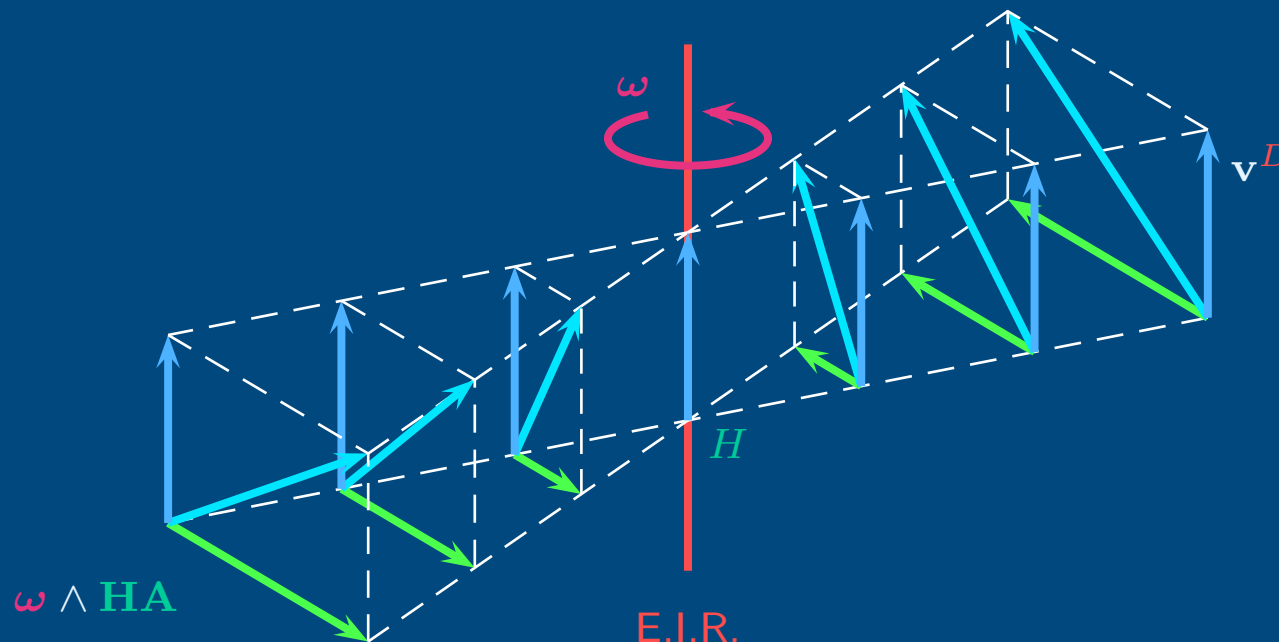
- **Teorema de Chasles:** el movimiento más general de un sólido en cada instante es una **rotación pura** alrededor de un eje más un **deslizamiento** (traslación) paralelo a ese eje (que puede variar con el tiempo).





Propiedades del campo de velocidades

- Todos los puntos del **E.I.R.** tienen la misma velocidad, \mathbf{v}^D , que es la velocidad **mínima** del campo de velocidades
- Un punto de velocidad **nula** pertenece al **E.I.R.** ($\mathbf{v}^D = 0$)
- Si varios puntos tienen la misma velocidad en una dirección dada, esa es la dirección del **E.I.R.** (siempre que no estén en una recta paralela a $\boldsymbol{\omega}$, en la que todos los puntos tienen la misma velocidad)

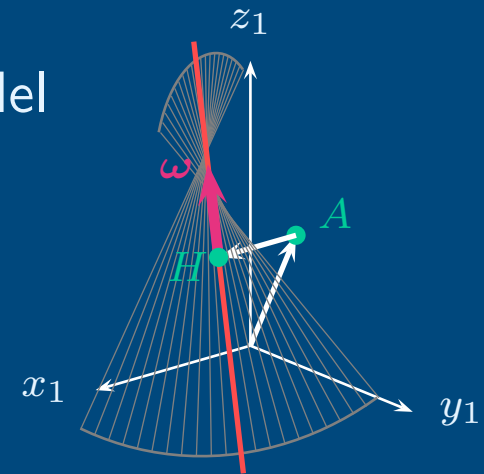




Propiedades del campo de velocidades: Axoides

- Axoide Fija: Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del E.I.R. en ejes fijos.

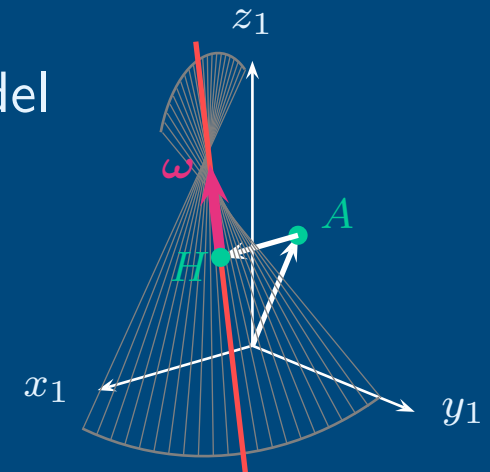
$$\mathbf{r}_{AF}(t, \lambda) = \mathbf{O}_1 \mathbf{A} \Big|_1 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_1 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_1$$



Propiedades del campo de velocidades: Axoides

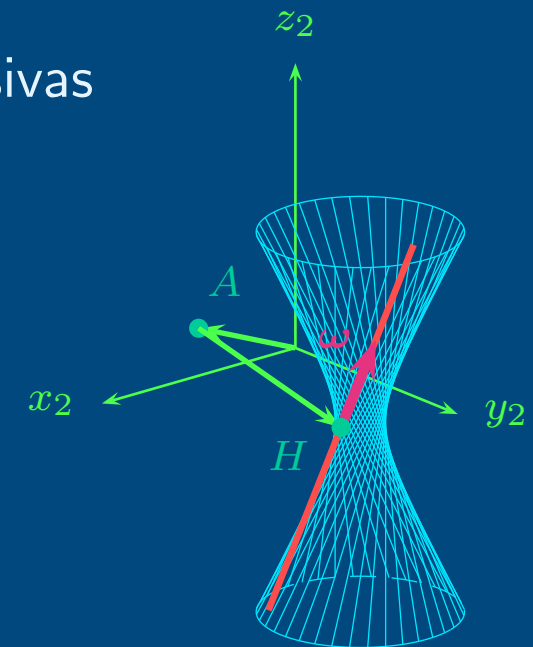
- **Axoide Fija:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del **E.I.R.** en ejes fijos.

$$\mathbf{r}_{AF}(t, \lambda) = \mathbf{O}_1 \mathbf{A} \Big|_1 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_1 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_1$$



- **Axoide Móvil:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del **E.I.R.** en **ejes sólido**.

$$\mathbf{r}_{AM}(t, \lambda) = \mathbf{O} \mathbf{A} \Big|_2 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_2 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_2$$

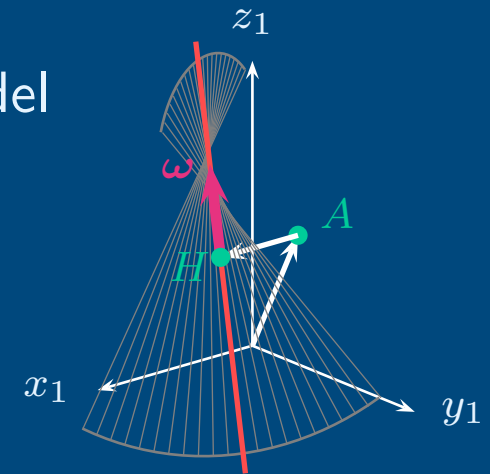




Propiedades del campo de velocidades: Axoides

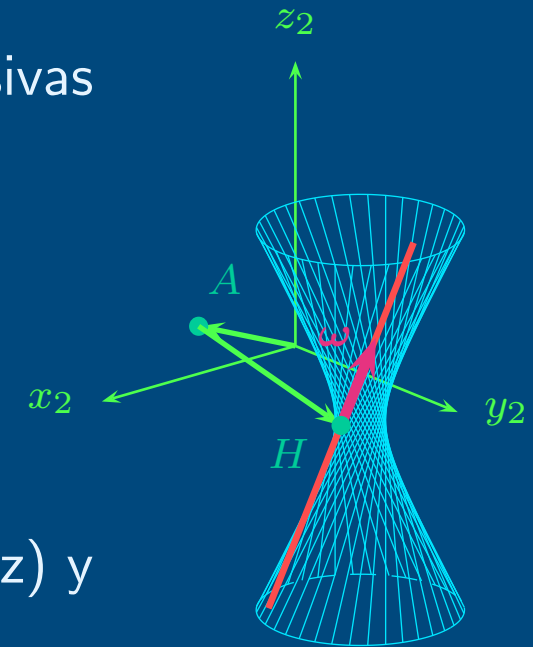
- **Axoide Fija:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del **E.I.R.** en ejes fijos.

$$\mathbf{r}_{AF}(t, \lambda) = \mathbf{O}_1 \mathbf{A} \Big|_1 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_1 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_1$$



- **Axoide Móvil:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del **E.I.R.** en **ejes sólido**.

$$\mathbf{r}_{AM}(t, \lambda) = \mathbf{O} \mathbf{A} \Big|_2 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_2 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_2$$

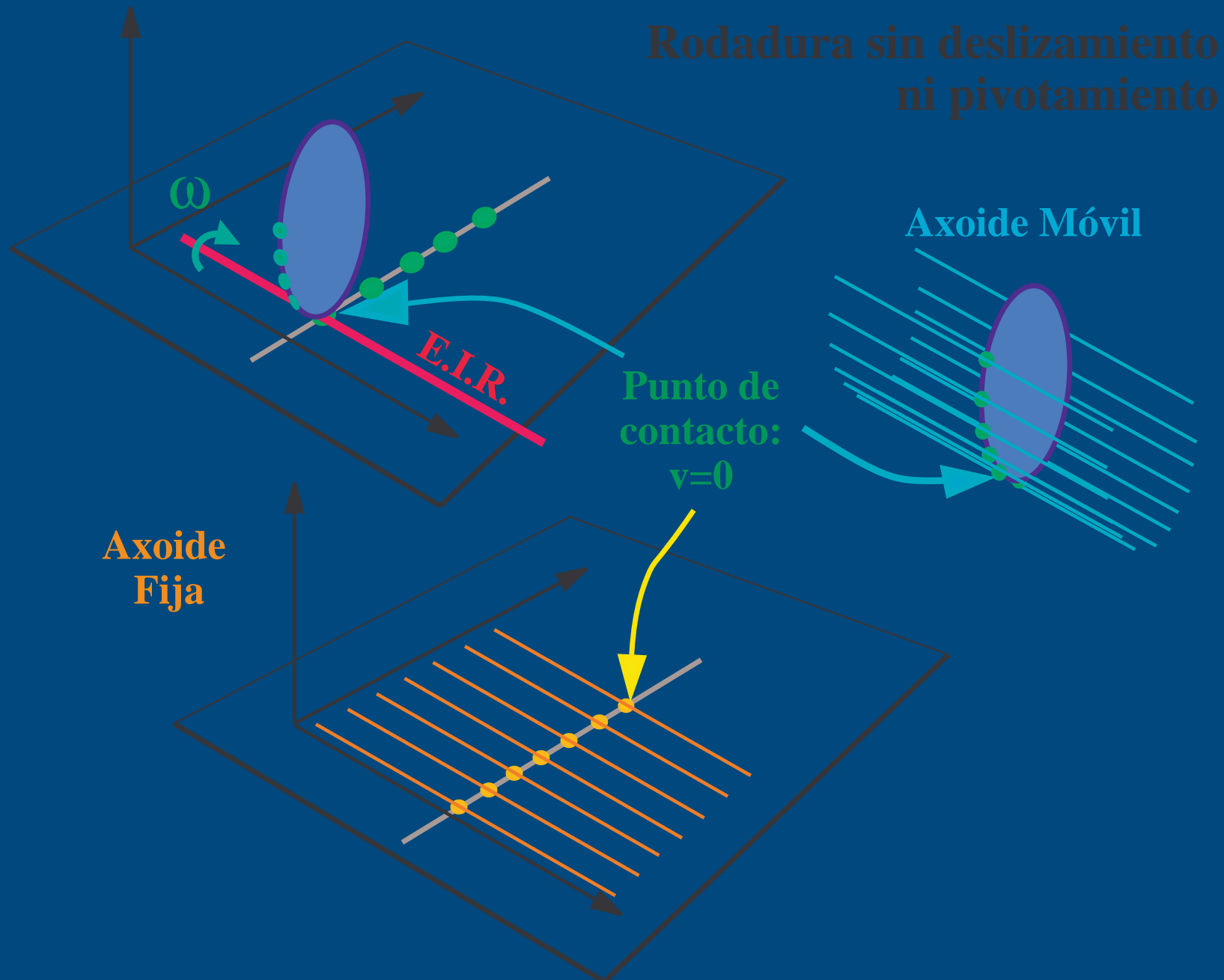


- Son superficies regladas con dos parámetros: λ (generatriz) y t (directriz)



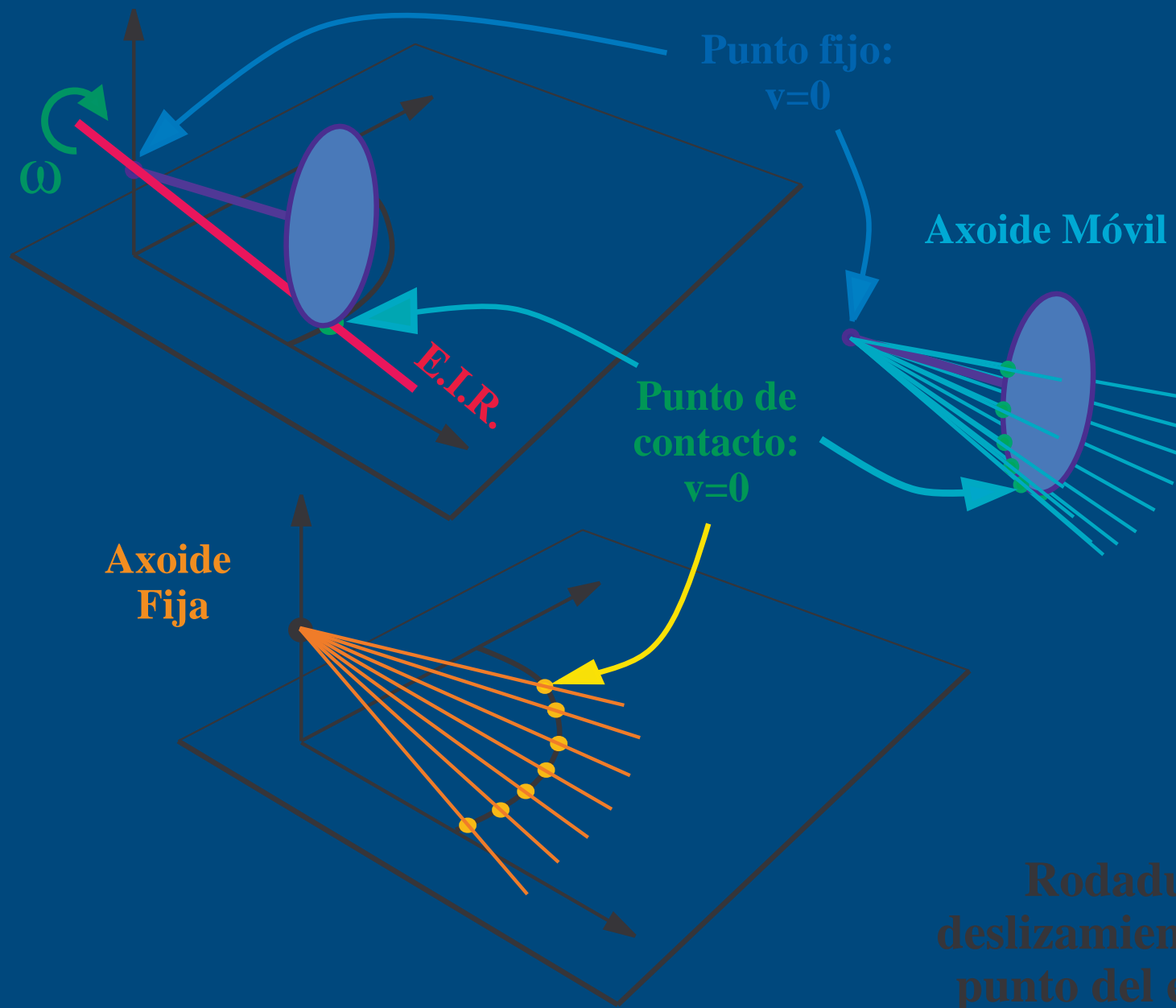


Axoides: ejemplos





Axoides: ejemplos





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,
- Derivando los versores

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$

$$\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{i}}_2, \dot{\mathbf{j}}_2, \dot{\mathbf{k}}_2$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$

- Derivando los versores

$$i_2, j_2, k_2 \rightarrow \dot{i}_2, \dot{j}_2, \dot{k}_2$$

Campo de velocidades: $\dot{i}_2 = \omega \wedge i_2$ $\dot{j}_2 = \omega \wedge j_2$ $\dot{k}_2 = \omega \wedge k_2$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$

- Derivando los versores

$$i_2, j_2, k_2 \rightarrow \dot{i}_2, \dot{j}_2, \dot{k}_2$$

Campo de velocidades: $\dot{i}_2 = \omega \wedge i_2$ $\dot{j}_2 = \omega \wedge j_2$ $\dot{k}_2 = \omega \wedge k_2$

$$\dot{i}_2 \wedge i_2 = i_2 \wedge (\omega \wedge i_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot i_2) i_2$$

$$\dot{j}_2 \wedge j_2 = j_2 \wedge (\omega \wedge j_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot j_2) j_2$$

$$\dot{k}_2 \wedge k_2 = k_2 \wedge (\omega \wedge k_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot k_2) k_2$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$

- Derivando los versores

$$i_2, j_2, k_2 \rightarrow \dot{i}_2, \dot{j}_2, \dot{k}_2$$

Campo de velocidades: $\dot{i}_2 = \omega \wedge i_2$ $\dot{j}_2 = \omega \wedge j_2$ $\dot{k}_2 = \omega \wedge k_2$

$$\dot{i}_2 \wedge \dot{i}_2 = i_2 \wedge (\omega \wedge i_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot i_2) i_2$$

$$\dot{j}_2 \wedge \dot{j}_2 = j_2 \wedge (\omega \wedge j_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot j_2) j_2$$

$$\dot{k}_2 \wedge \dot{k}_2 = k_2 \wedge (\omega \wedge k_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot k_2) k_2$$

$$\dot{i}_2 \wedge \dot{i}_2 + \dot{j}_2 \wedge \dot{j}_2 + \dot{k}_2 \wedge \dot{k}_2 = 3 \cdot \omega - \omega = 2 \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\dot{i}_2 \wedge \dot{i}_2 + \dot{j}_2 \wedge \dot{j}_2 + \dot{k}_2 \wedge \dot{k}_2 \right)$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,

$$Q(t) \rightarrow Q^T \cdot \dot{Q} = \Omega$$

- Derivando los versores

$$i_2, j_2, k_2 \rightarrow \dot{i}_2, \dot{j}_2, \dot{k}_2$$

Campo de velocidades: $\dot{i}_2 = \omega \wedge i_2$ $\dot{j}_2 = \omega \wedge j_2$ $\dot{k}_2 = \omega \wedge k_2$

$$\dot{i}_2 \wedge i_2 = i_2 \wedge (\omega \wedge i_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot i_2) i_2$$

$$\dot{j}_2 \wedge j_2 = j_2 \wedge (\omega \wedge j_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot j_2) j_2$$

$$\dot{k}_2 \wedge k_2 = k_2 \wedge (\omega \wedge k_2) = 1 \cdot \omega - (\omega \cdot k_2) k_2$$

$$\dot{i}_2 \wedge i_2 + \dot{j}_2 \wedge j_2 + \dot{k}_2 \wedge k_2 = 3 \cdot \omega - \omega = 2 \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\dot{i}_2 \wedge i_2 + \dot{j}_2 \wedge j_2 + \dot{k}_2 \wedge k_2 \right)$$

Muy similar al anterior:

$$Q^T \cdot \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{i}_2 \\ \dot{j}_2 \\ \dot{k}_2 \end{bmatrix} \cdot [i_2 \mid j_2 \mid k_2] = \Omega$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando dos vectores independientes de S_2 ,

$$\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} \end{array} \right\} \boldsymbol{\omega} \quad 6 \text{ Ecuaciones, 3 independientes}$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando dos vectores independientes de S_2 , $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} \end{array} \right\} \boldsymbol{\omega} \quad 6 \text{ Ecuaciones, 3 independientes}$$

- Explícitamente,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} = \beta \mathbf{c} + \gamma \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \quad \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} = \alpha \mathbf{c} + \gamma \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{a}} = -\beta c^2 \quad \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{b}} = \alpha c^2 \quad \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \gamma \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \gamma c^2 = -\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c^2} \left[(\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{b}}) \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{c} \right]$$





Determinación de la velocidad angular

- Derivando dos vectores independientes de S_2 , $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{b}} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \boldsymbol{\omega} \quad 6 \text{ Ecuaciones, 3 independientes}$$

- Explícitamente,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} = \beta \mathbf{c} + \gamma \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \quad \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} = \alpha \mathbf{c} + \gamma \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{a}} = -\beta c^2 \quad \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{b}} = \alpha c^2 \quad \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \gamma \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \gamma c^2 = -\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c^2} \left[(\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{b}}) \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{c} \right]$$

- También,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\mathbf{b}} \wedge \dot{\mathbf{a}}}{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}} \quad (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} \neq 0)$$





Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^B = \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}$$





Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^B = \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}$$

Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{\gamma}_{21}^B = \boldsymbol{\gamma}_{21}^A + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$$





Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^B = \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}$$

Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{\gamma}_{21}^B = \boldsymbol{\gamma}_{21}^A + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$$

- $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ es el **vector aceleración angular** del sólido S_2 respecto a S_1 .



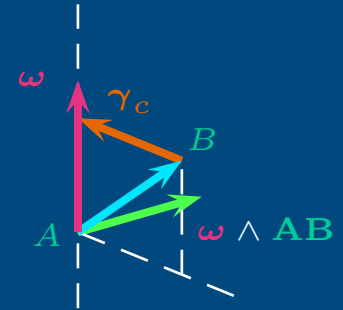


Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^B = \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{AB}}$$



Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{\gamma}_{21}^B = \boldsymbol{\gamma}_{21}^A + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$$

- $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ es el **vector aceleración angular** del sólido S_2 respecto a S_1 .
- El término $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$ está dirigido hacia el eje paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{21}$ que pasa por A ; es una **aceleración centrípeta**.



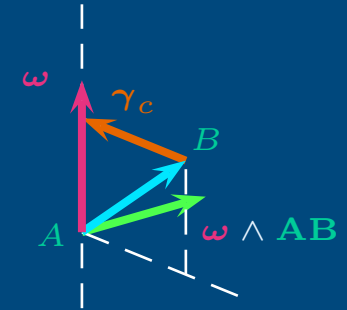


Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^B = \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{AB}}$$



Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{\gamma}_{21}^B = \boldsymbol{\gamma}_{21}^A + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$$

- $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ es el **vector aceleración angular** del sólido S_2 respecto a S_1 .
- El término $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$ está dirigido hacia el eje paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{21}$ que pasa por A ; es una **aceleración centrípeta**.
- Los dos primeros términos dan una estructura similar a la del campo de velocidades (eje $\parallel \boldsymbol{\alpha}$); el tercero (eje $\parallel \boldsymbol{\omega}$) rompe la estructura porque no es rotacional sino centrípeta, y los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ tienen en general direcciones distintas.





Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 Q_{12} X_2^M \right) \\ \gamma_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 Q_{12} X_2^M + \Omega_{21}|_1 \dot{Q}_{12} X_2^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 X_1^M + \Omega_{21}|_1 \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) \end{aligned}$$





Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M + \Omega_{21}|_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 X_1^M + \Omega_{21}|_1 \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) \end{aligned}$$

- En ejes sólido, sabiendo que $\dot{\Omega}_{21}|_1 = \mathbf{Q}_{12} \dot{\Omega}_{21}|_2 \mathbf{Q}_{12}^T$,

$$\gamma_{21}^M = \mathcal{R}_2 \left(\mathbf{Q}_{12}^T \ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_2 X_2^M + \Omega_{21}|_2 \Omega_{21}|_2 X_2^M \right)$$





Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 Q_{12} X_2^M \right) \\ \gamma_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 Q_{12} X_2^M + \Omega_{21}|_1 \dot{Q}_{12} X_2^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 X_1^M + \Omega_{21}|_1 \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) \end{aligned}$$

- En ejes sólido, sabiendo que $\dot{\Omega}_{21}|_1 = Q_{12} \dot{\Omega}_{21}|_2 Q_{12}^T$,

$$\gamma_{21}^M = \mathcal{R}_2 \left(Q_{12}^T \ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_2 X_2^M + \Omega_{21}|_2 \Omega_{21}|_2 X_2^M \right)$$

- $\dot{\Omega}_{21}$ es el tensor aceleración angular del sólido S_2 respecto a S_1 .





Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M \right) \\ \gamma_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M + \Omega_{21}|_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_1 X_1^M + \Omega_{21}|_1 \Omega_{21}|_1 X_1^M \right) \end{aligned}$$

- En ejes sólido, sabiendo que $\dot{\Omega}_{21}|_1 = \mathbf{Q}_{12} \dot{\Omega}_{21}|_2 \mathbf{Q}_{12}^T$,

$$\gamma_{21}^M = \mathcal{R}_2 \left(\mathbf{Q}_{12}^T \ddot{X}_1^O + \dot{\Omega}_{21}|_2 X_2^M + \Omega_{21}|_2 \Omega_{21}|_2 X_2^M \right)$$

- $\dot{\Omega}_{21}$ es el tensor aceleración angular del sólido S_2 respecto a S_1 .
- Análogo a la forma vectorial,

$$\gamma_{21}^M = \gamma_{21}^O + \dot{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} + \omega_{21} \wedge (\omega_{21} \wedge \mathbf{OM})$$





Aceleración angular de un sólido

- La **Aceleración angular** es la derivada de la **velocidad angular**:

$$\dot{\Omega}|_1 = \left(\dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T \right) = \ddot{Q}_{12} Q_{12}^T + \dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T$$

$$\dot{\Omega}|_2 = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right) = \dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} + Q_{12}^T \ddot{Q}_{12}$$





Aceleración angular de un sólido

- La **Aceleración angular** es la derivada de la **velocidad angular**:

$$\dot{\Omega}|_1 = \left(\dot{Q}_{12} Q_{12}^T \right) = \ddot{Q}_{12} Q_{12}^T + \dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T$$

$$\dot{\Omega}|_2 = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right) = \dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} + Q_{12}^T \ddot{Q}_{12}$$

- Es antisimétrica:

$$\Omega + \Omega^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega} + \dot{\Omega}^T = \mathbf{0},$$





Aceleración angular de un sólido

- La **Aceleración angular** es la derivada de la **velocidad angular**:

$$\dot{\Omega}|_1 = \left(\dot{Q}_{12} Q_{12}^T \right) = \ddot{Q}_{12} Q_{12}^T + \dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T$$

$$\dot{\Omega}|_2 = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right) = \dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} + Q_{12}^T \ddot{Q}_{12}$$

- Es antisimétrica:

$$\Omega + \Omega^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega} + \dot{\Omega}^T = \mathbf{0},$$

- tiene un vector axial asociado:

$$\mathcal{R}_i \cdot \dot{\Omega}_{21}|_i \cdot X_i^M \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM},$$





Aceleración angular de un sólido

- La **Aceleración angular** es la derivada de la **velocidad angular**:

$$\dot{\Omega}|_1 = \left(\dot{Q}_{12} Q_{12}^T \right) = \ddot{Q}_{12} Q_{12}^T + \dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T$$

$$\dot{\Omega}|_2 = \left(Q_{12}^T \dot{Q}_{12} \right) = \dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} + Q_{12}^T \ddot{Q}_{12}$$

- Es antisimétrica:

$$\Omega + \Omega^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega} + \dot{\Omega}^T = \mathbf{0},$$

- tiene un vector axial asociado:

$$\mathcal{R}_i \cdot \dot{\Omega}_{21}|_i \cdot X_i^M \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM},$$

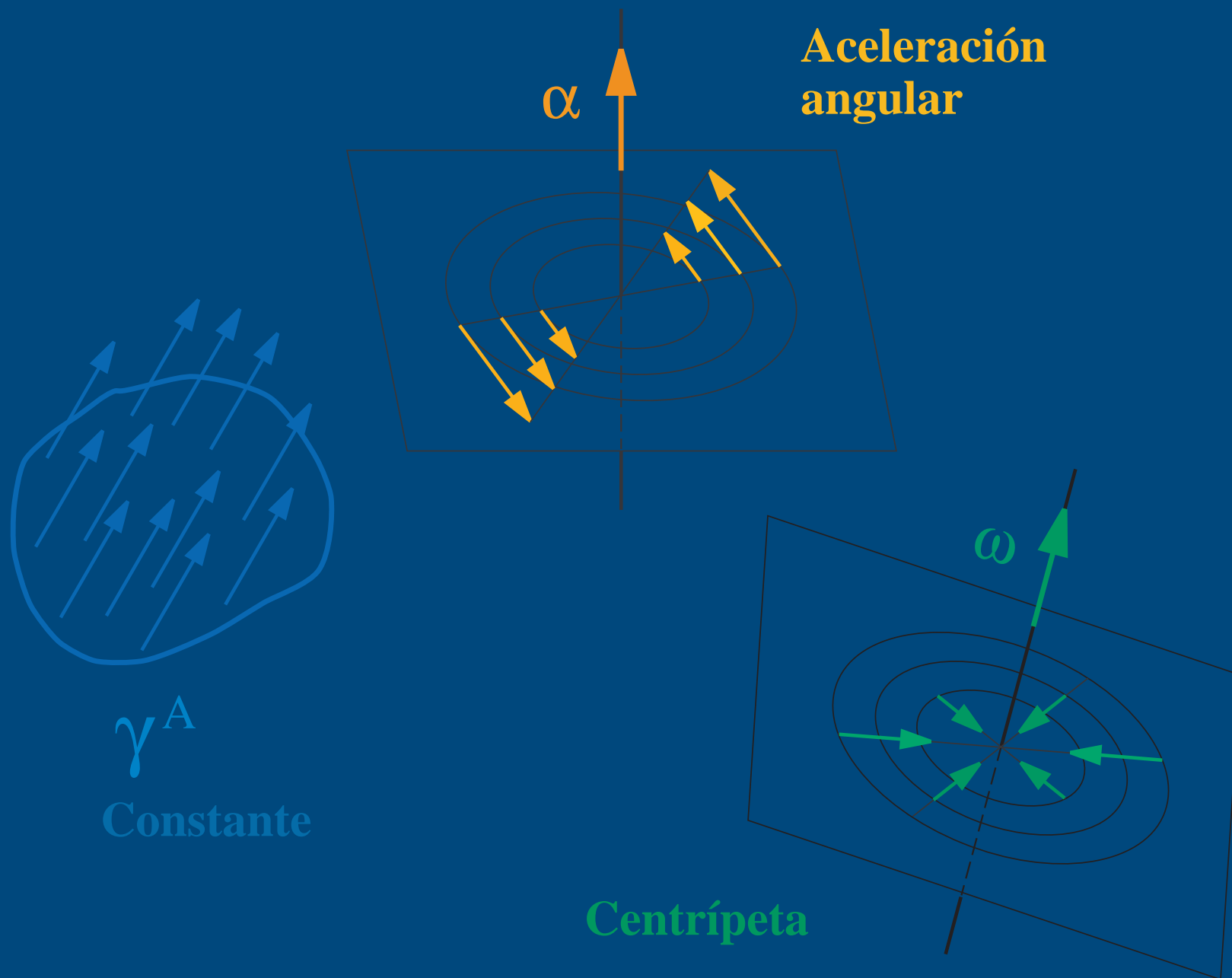
- y es también un tensor:

$$\dot{\Omega}|_1 = Q_{12} \dot{\Omega}|_2 Q_{12}^T$$





Estructura del campo de aceleraciones





Resumen de propiedades cinemáticas

Punto	Sólido
Vector velocidad	Campo de velocidades
	Velocidad angular
Vector aceleración	Campo de aceleraciones
	Aceleración angular





Movimiento plano

Movimiento Plano

Simplificaciones

Base y **Ruleta**

Base y **Ruleta** ruedan sin deslizar

Propiedades de 3 planos

Propiedades de 3 y 4 planos

Aplicaciones: Mecanismos

Traslación circular y rotación

Campo de aceleraciones plano

Estructura del campo de aceleraciones

Centro de aceleraciones





Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del **sólido móvil** S_0 tienen velocidades paralelas a un **plano fijo** π_1 .





Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1 .

$$\text{Si } \mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \quad \forall M \in S_0$$



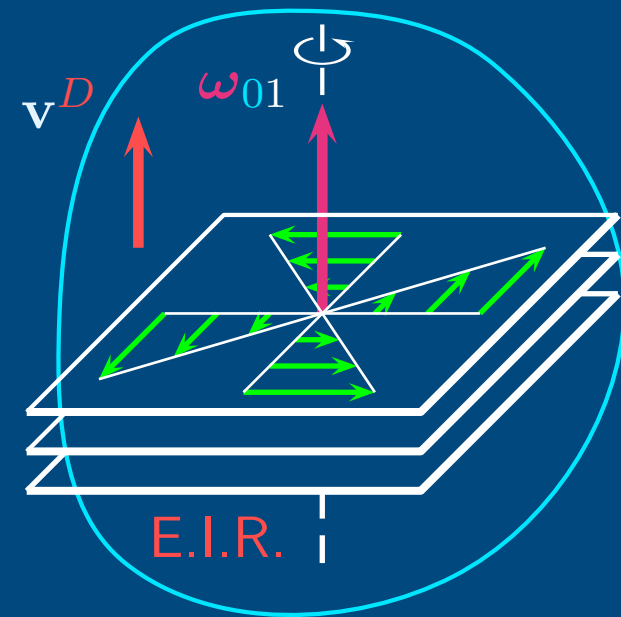
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1 .

$$\text{Si } \mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \quad \forall M \in S_0$$

$$\text{C.V.: } \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$$

$$\text{donde: } \begin{cases} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^D : \text{Vel. min. desl.} \end{cases}$$



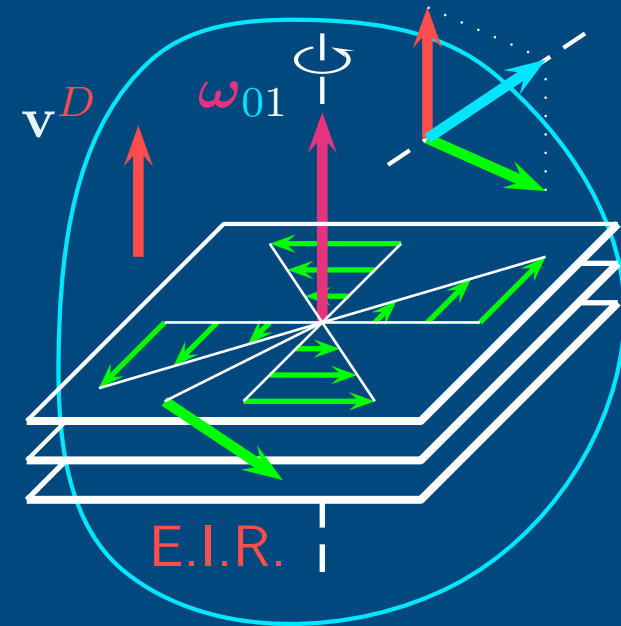
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1 .

Si $\mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \forall M \in S_0$

C.V.: $\mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$

donde: $\begin{cases} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^D : \text{Vel. min. desl.} \end{cases}$



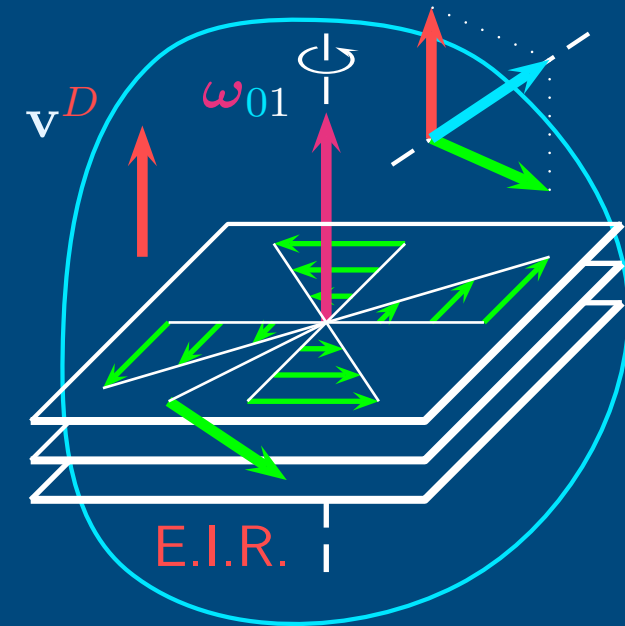
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1 .

$$\text{Si } \mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \quad \forall M \in S_0$$

$$\text{C.V.: } \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$$

$$\text{donde: } \begin{cases} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^D : \text{Vel. min. desl.} \end{cases}$$



Hay dos posibilidades:

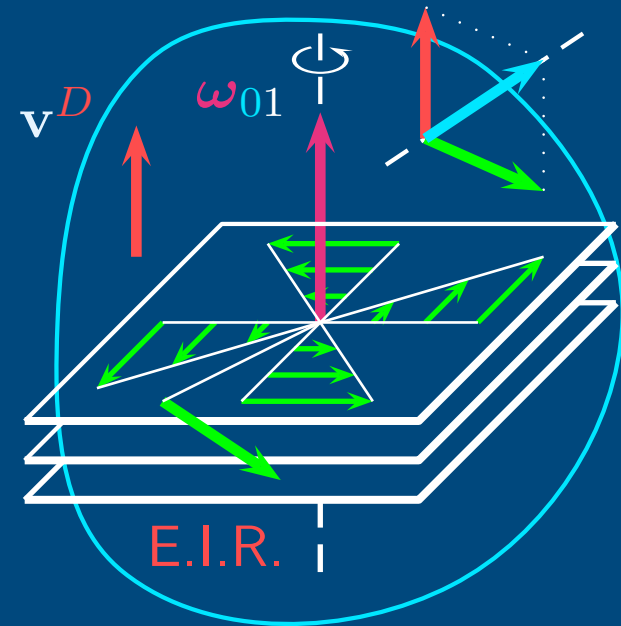
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del **sólido móvil** S_0 tienen velocidades paralelas a un **plano fijo** π_1 .

Si $\mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \forall M \in S_0}$

C.V.: $\mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$

donde: $\begin{cases} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^D : \text{Vel. min. desl.} \end{cases}$



Hay dos posibilidades:

$\boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0} : \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{01}^O \perp \mathbf{u}$ Traslación (trivial)

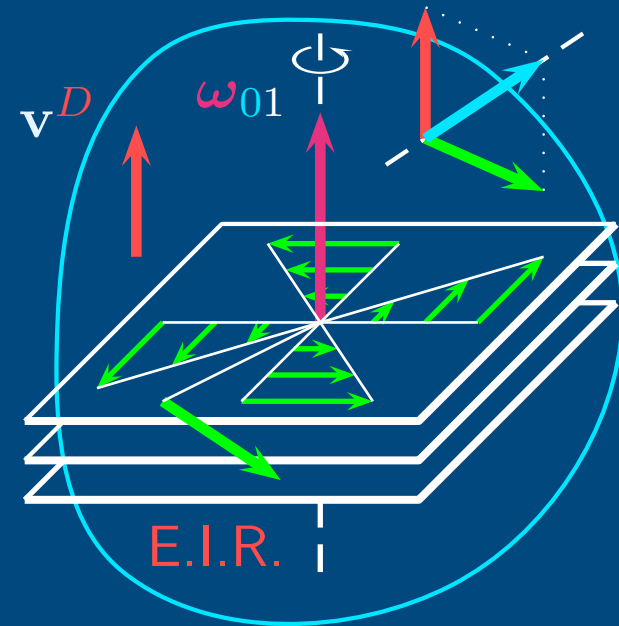
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1 .

Si $\mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^M = 0 \forall M \in S_0$

C.V.: $\mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$

donde: $\begin{cases} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^D : \text{Vel. min. desl.} \end{cases}$



Hay dos posibilidades:

$\boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0} : \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{01}^O \perp \mathbf{u}$ Traslación (trivial)

$\boldsymbol{\omega}_{01} \neq \mathbf{0} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^D = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_{01} \parallel \mathbf{u} \end{array} \right\}$ Giro alrededor de un eje fijo $\parallel \mathbf{u}$

Simplificaciones



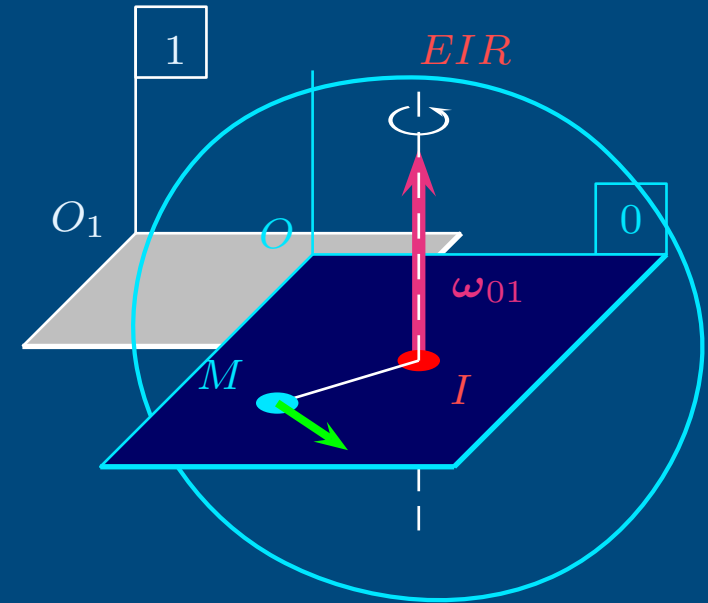
Campo bidimensional de velocidades y de aceleraciones:



Simplificaciones

Campo bidimensional de velocidades y de aceleraciones:

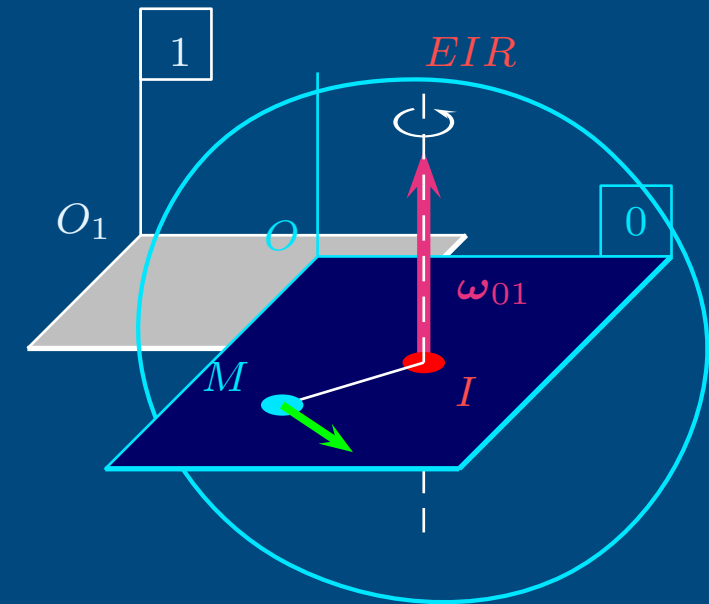
- Plano móvil π_0 y fijo π_1 , en vez de sólidos
- Corte del E.I.R. con los planos: I , Centro Instantáneo de Rotación, o C.I.R.
- $\mathbf{v}^D = 0$ No hay deslizamiento
- $\mathbf{v}_{01}^M = \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{IM}$



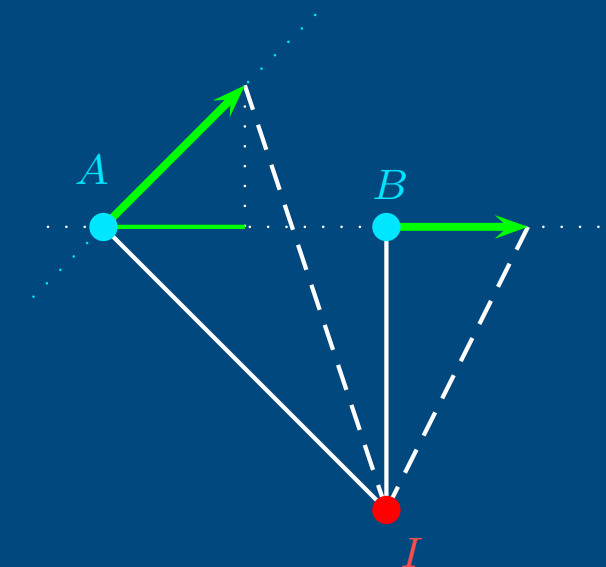
Simplificaciones

Campo bidimensional de velocidades y de aceleraciones:

- Plano móvil π_0 y fijo π_1 , en vez de sólidos
- Corte del E.I.R. con los planos: I , Centro Instantáneo de Rotación, o C.I.R.
- $\mathbf{v}^D = 0$ No hay deslizamiento
- $\mathbf{v}_{01}^M = \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{IM}$



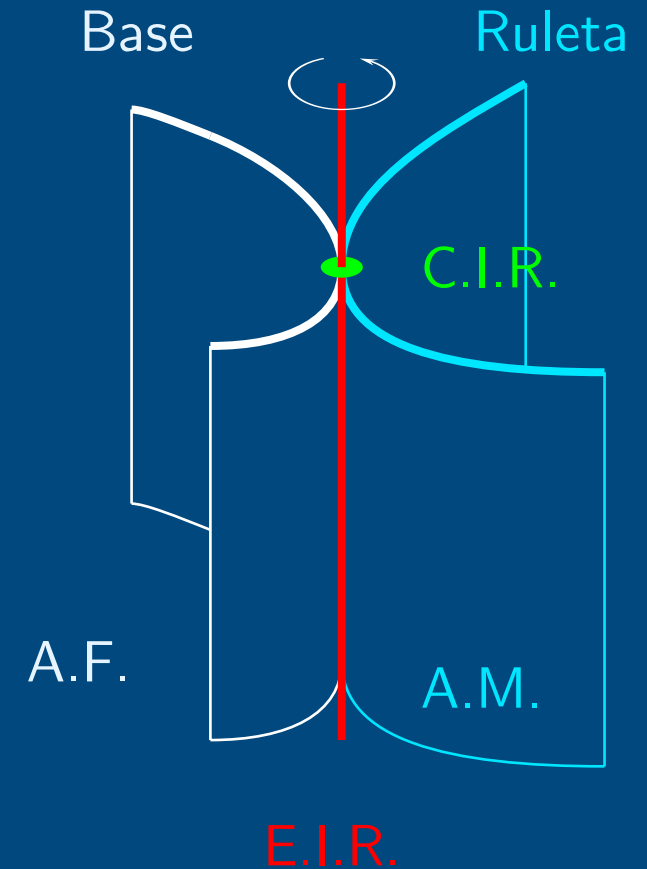
- Con las direcciones de las velocidades de dos puntos se determina directamente el C.I.R.
- Los módulos no son independientes por la equiproyectividad





Base y Ruleta

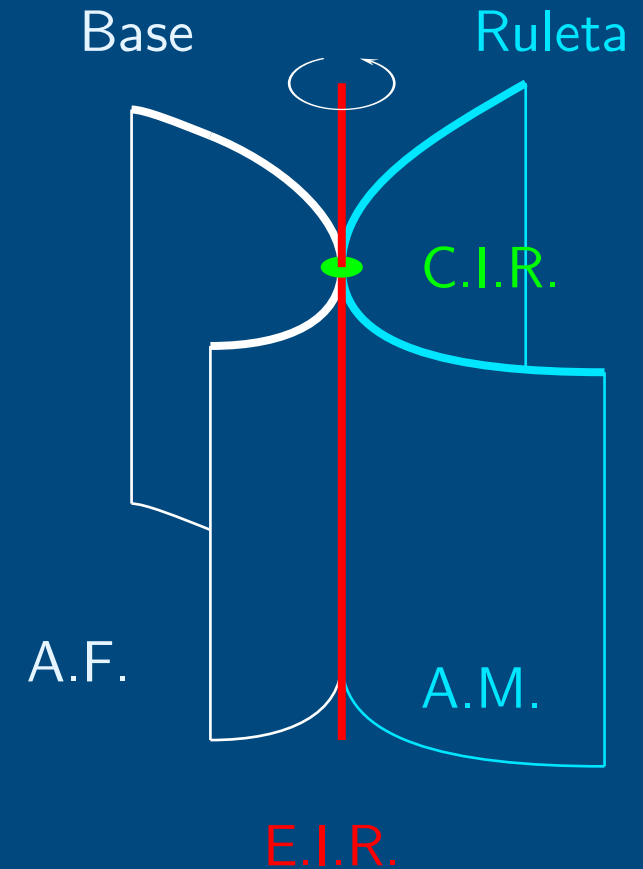
- Si $\omega_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1 .





Base y Ruleta

- Si $\omega_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1 .
- Si trabajamos en el plano, solo necesitamos los cortes de las axoides con sus respectivos planos: **polares** fija (Base) y móvil (Ruleta)

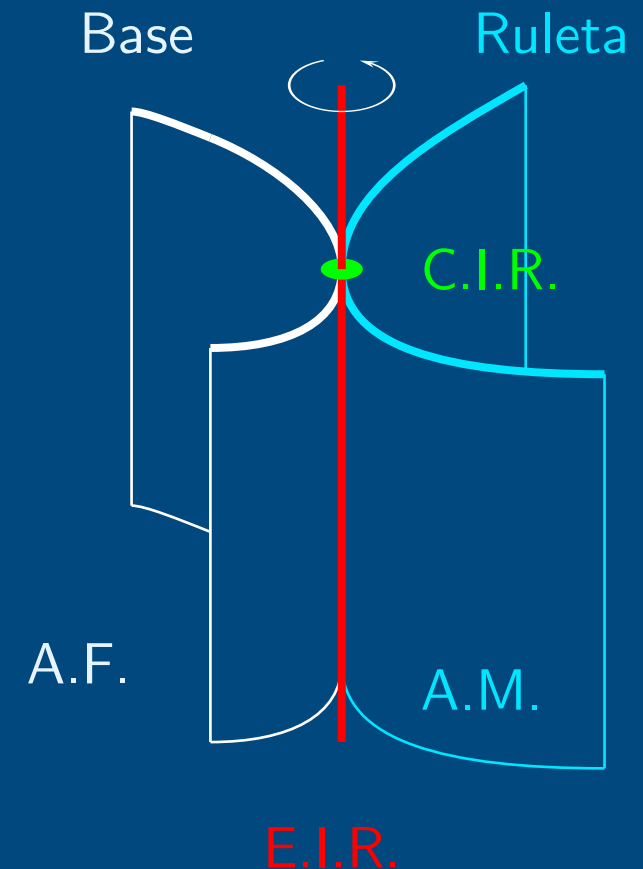




Base y Ruleta

- Si $\omega_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1 .
- Si trabajamos en el plano, solo necesitamos los cortes de las axoides con sus respectivos planos: **polares** fija (Base) y **móvil** (Ruleta)

Base: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del **C.I.R.** sobre el **plano fijo**



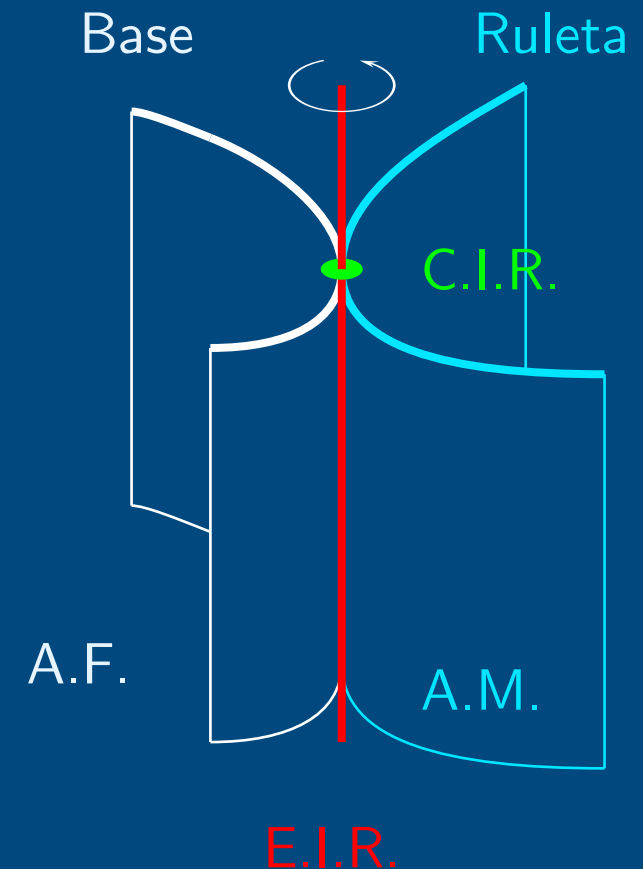


Base y Ruleta

- Si $\omega_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1 .
- Si trabajamos en el plano, solo necesitamos los cortes de las axoides con sus respectivos planos: **polares** fija (Base) y **móvil** (Ruleta)

Base: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del **C.I.R.** sobre el **plano fijo**

Ruleta: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del **C.I.R.** sobre el **plano móvil**



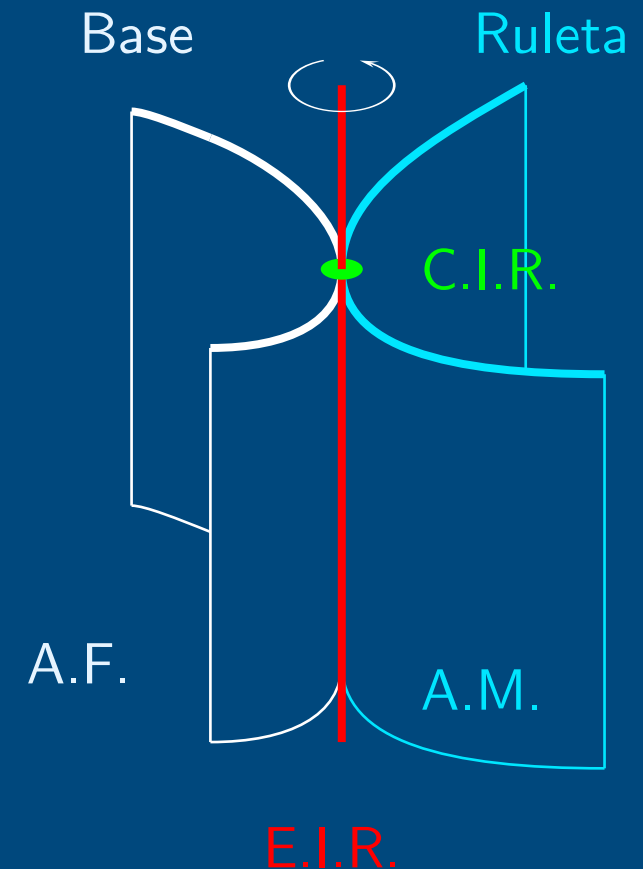


Base y Ruleta

- Si $\omega_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1 .
- Si trabajamos en el plano, solo necesitamos los cortes de las axoides con sus respectivos planos: **polares** fija (Base) y **móvil** (Ruleta)

Base: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del **C.I.R.** sobre el **plano fijo**

Ruleta: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del **C.I.R.** sobre el **plano móvil**



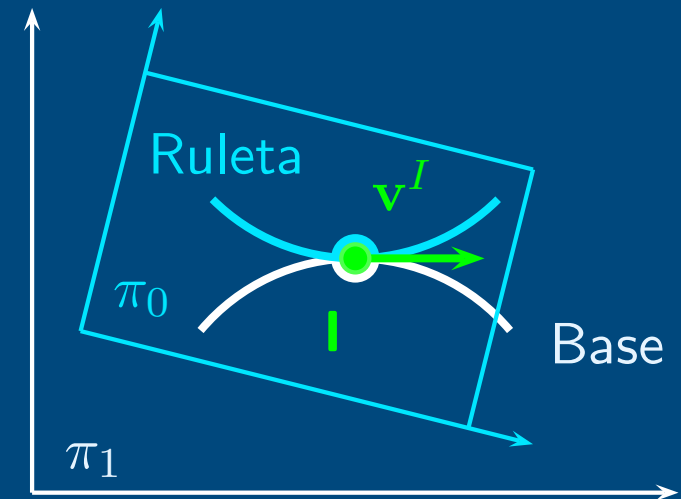
Construcción: hojas de papel y alfiler sobre el C.I.R.





Base y Ruleta ruedan sin deslizar

El C.I.R. I , como **punto independiente** (seguidor del C.I.R. o sólido S_2), recorre la Base sobre π_1 y la Ruleta sobre π_0

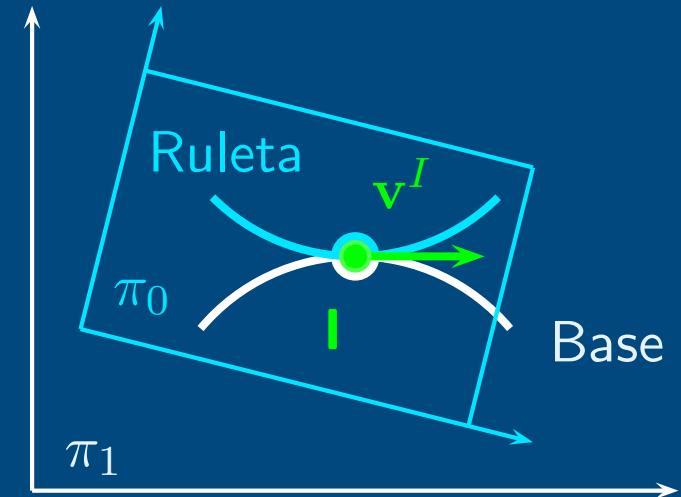




Base y Ruleta ruedan sin deslizar

El C.I.R. I , como **punto independiente** (seguidor del C.I.R. o sólido S_2), recorre la Base sobre π_1 y la **Ruleta** sobre π_0

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{v}_{21}^I = \mathbf{v}_{20}^I + \mathbf{v}_{01}^I \\
 \underbrace{tg(C_1)}_{tg(C_1) \equiv tg(C_0)} \quad \underbrace{tg(C_0)}_{\text{CIR}}
 \end{array} \right\}$$





Base y Ruleta ruedan sin deslizar

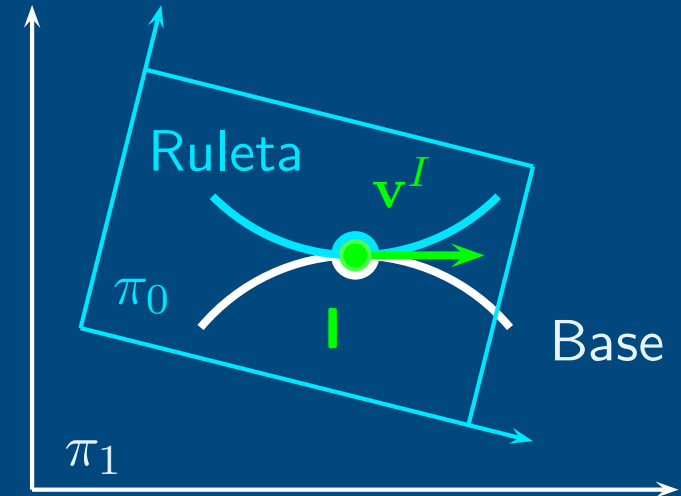
El C.I.R. I , como **punto independiente** (seguidor del C.I.R. o sólido S_2), recorre la Base sobre π_1 y la **Ruleta** sobre π_0

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_{21}^I = \mathbf{v}_{20}^I + \mathbf{v}_{01}^I \\ tg(C_1) \quad tg(C_0) \quad \text{CIR} \end{array} \right\}$$

$$tg(C_1) \equiv tg(C_0)$$

Velocidad de sucesión del **C.I.R.**:

$$\mathbf{v}_{21}^I = \mathbf{v}_{20}^I = \mathbf{v}^I$$





Base y Ruleta ruedan sin deslizar

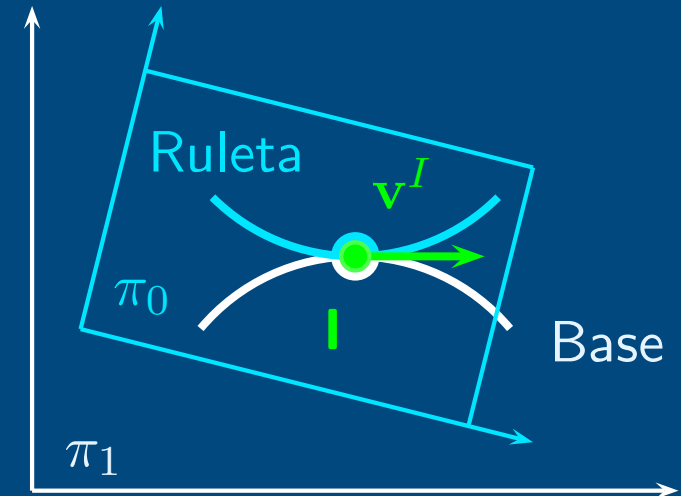
El C.I.R. I , como **punto independiente** (seguidor del C.I.R. o sólido S_2), recorre la Base sobre π_1 y la **Ruleta** sobre π_0

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_{21}^I = \mathbf{v}_{20}^I + \cancel{\mathbf{v}_{01}^I} \\ tg(C_1) \quad tg(C_0) \quad \text{CIR} \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{tg(C_1) \equiv tg(C_0)}$$

Velocidad de sucesión del **C.I.R.**:

$$\boxed{\mathbf{v}_{21}^I = \mathbf{v}_{20}^I = \mathbf{v}^I}$$



$$\frac{ds_1}{dt} \mathbf{t}_1 = \frac{ds_0}{dt} \mathbf{t}_0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{t}_0 & \rightarrow \text{Son tangentes en } I \\ s_1 = s_0 + \text{Cte.} & \rightarrow \text{No desliza} \end{cases}$$

\Rightarrow La **Ruleta** rueda sin deslizar sobre la Base





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.
- $I_{ij} = I_{ji}$





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$

Por movimientos inversos,
cuando M es el C.I.R. de uno:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij}^M &= -\mathbf{v}_{ji}^M; \\ \mathbf{v}_{ij}^I &= \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I. \end{aligned}$$





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$

Por movimientos inversos,
cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^M = -\mathbf{v}_{ji}^M$;
 $\mathbf{v}_{ij}^I = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I$.

- I_{21} , I_{20} e I_{01} están alineados





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$ Por movimientos inversos, $\mathbf{v}_{ij}^M = -\mathbf{v}_{ji}^M$;
cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^I = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I$.

- I_{21} , I_{20} e I_{01} están alineados

- M arbitrario: $\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{21}^M$;





Propiedades de 3 planos

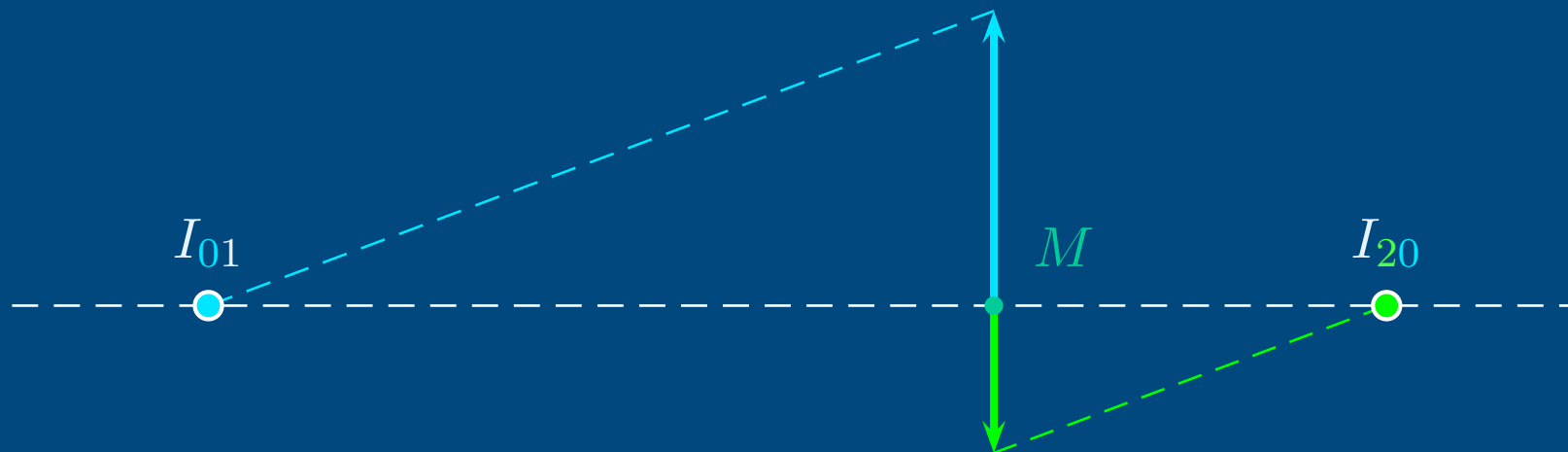
- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$ Por movimientos inversos, cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^M = -\mathbf{v}_{ji}^M$;
 $\mathbf{v}_{ij}^I = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I$.

- I_{21} , I_{20} e I_{01} están alineados

- M arbitrario: $\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{21}^M$;
- Si $M \in \overline{I_{20}I_{01}}$,

$$\mathbf{v}_{20}^M, \mathbf{v}_{01}^M \perp \overline{I_{20}I_{01}}$$





Propiedades de 3 planos

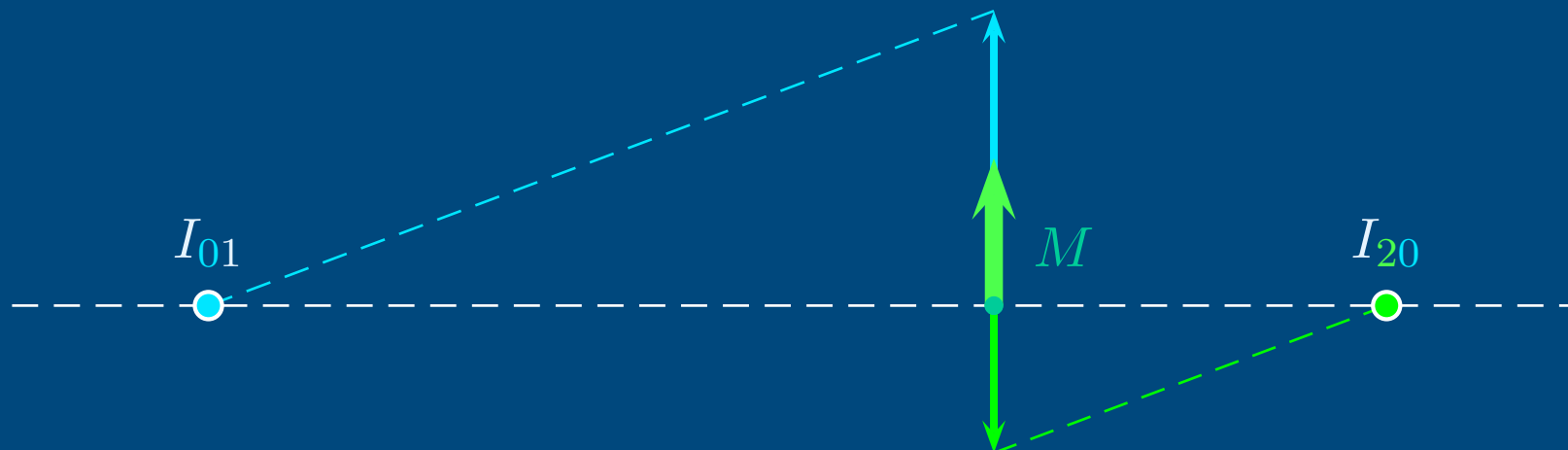
- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$ Por movimientos inversos, cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^M = -\mathbf{v}_{ji}^M$;
 $\mathbf{v}_{ij}^I = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I$.

- I_{21} , I_{20} e I_{01} están alineados

- M arbitrario: $\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{21}^M$;
- Si $M \in \overline{I_{20}I_{01}}$,

$$\mathbf{v}_{20}^M, \mathbf{v}_{01}^M \perp \overline{I_{20}I_{01}} \Rightarrow \mathbf{v}_{21}^M \perp \overline{I_{20}I_{01}}$$





Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1 , π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.

- $I_{ij} = I_{ji}$

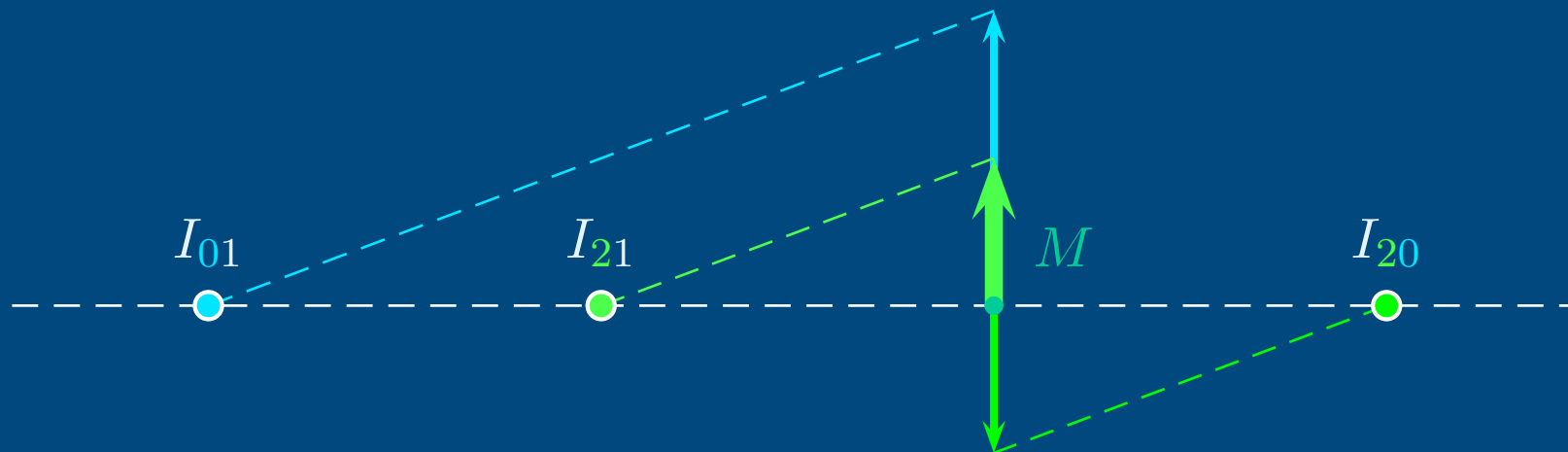
Por movimientos inversos,
cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^M = -\mathbf{v}_{ji}^M$;
 $\mathbf{v}_{ij}^I = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^I$.

- I_{21} , I_{20} e I_{01} están alineados

Teorema de Kennedy

- M arbitrario: $\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{21}^M$;
- Si $M \in \overline{I_{20}I_{01}}$,

$$\mathbf{v}_{20}^M, \mathbf{v}_{01}^M \perp \overline{I_{20}I_{01}} \Rightarrow \mathbf{v}_{21}^M \perp \overline{I_{20}I_{01}} \Rightarrow I_{21} \in \overline{I_{20}I_{01}}$$





Propiedades de 3 y 4 planos

- Los CIR de cuatro planos están en los vértices de un cuadrilátero completo

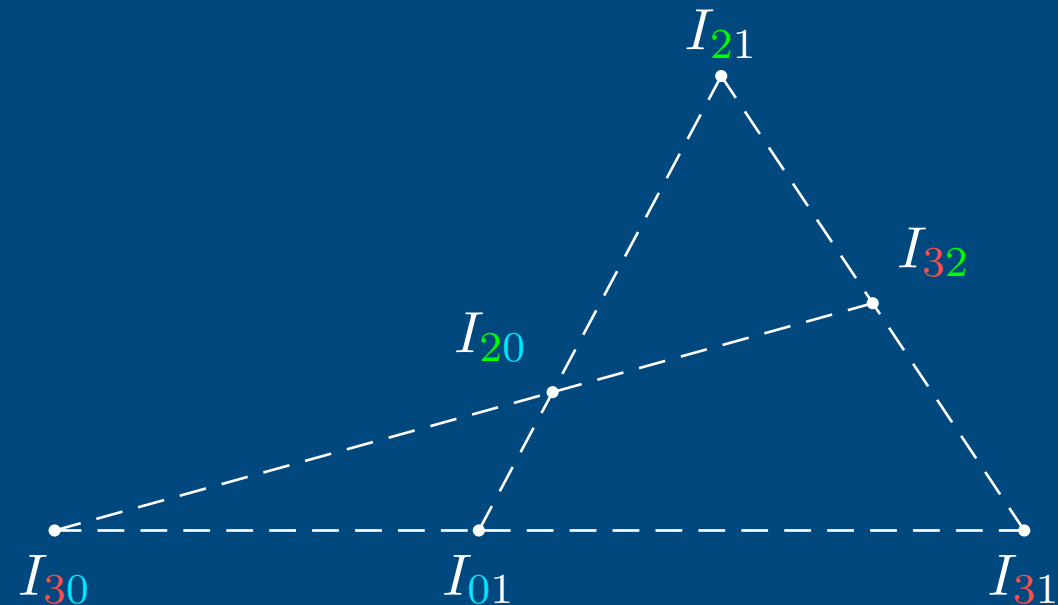
Con un cuarto plano π_3 , hay 12 movimientos distintos: I_{01} , I_{02} , I_{03} , I_{12} , I_{13} e I_{23} más los seis inversos. Se pueden formar cuatro composiciones de movimientos cuyos C.I.R. están alineados de 3 en 3 (cuadrilátero completo):

$$2/0 + 0/1 = 2/1 \quad I_{20}, I_{01}, I_{21}$$

$$3/0 + 0/1 = 3/1 \quad I_{30}, I_{01}, I_{31}$$

$$3/2 + 2/1 = 3/1 \quad I_{32}, I_{21}, I_{31}$$

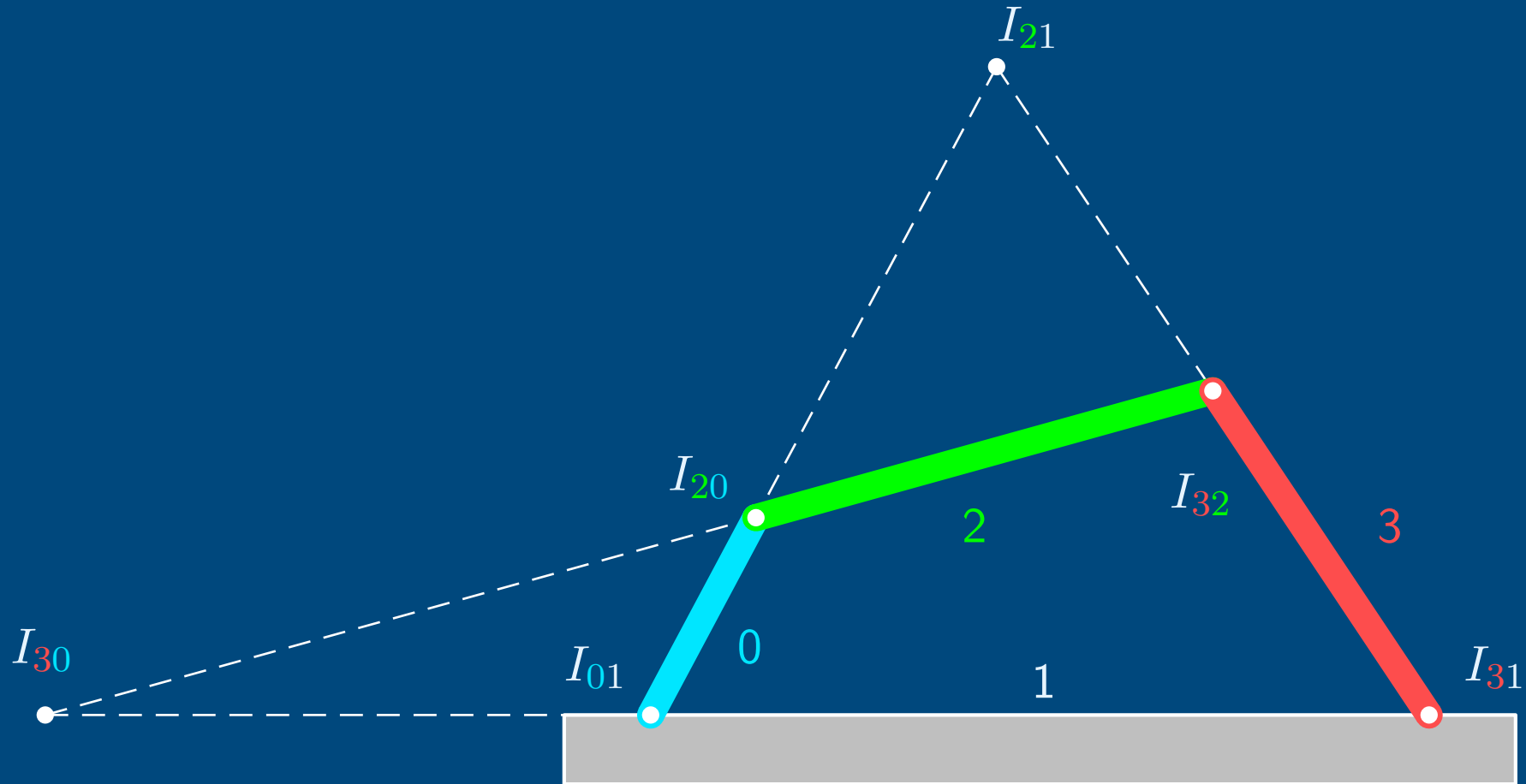
$$3/2 + 2/0 = 3/0 \quad I_{32}, I_{20}, I_{30}$$



Aplicaciones: Mecanismos



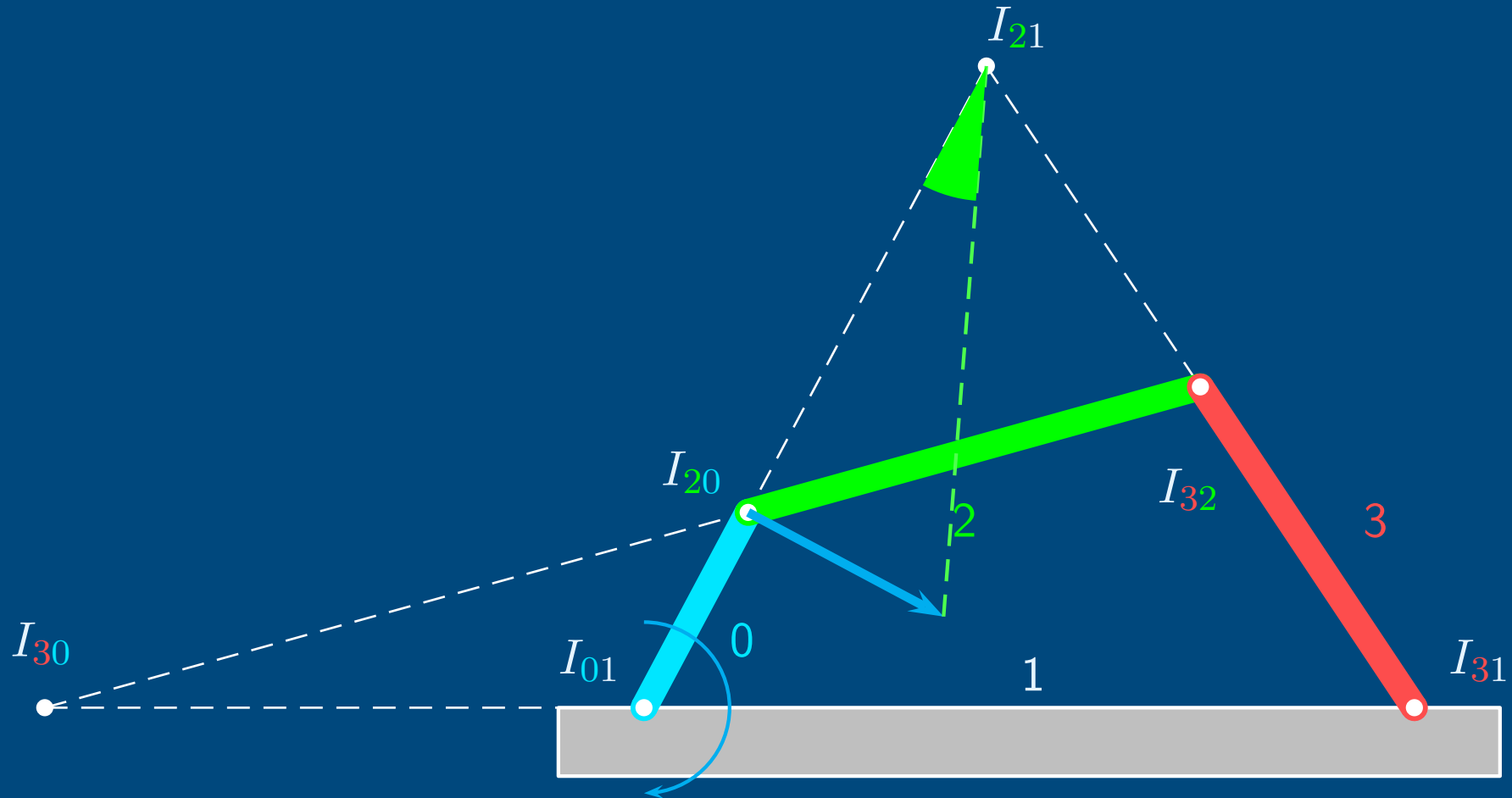
Mecanismo de 4 barras



Aplicaciones: Mecanismos



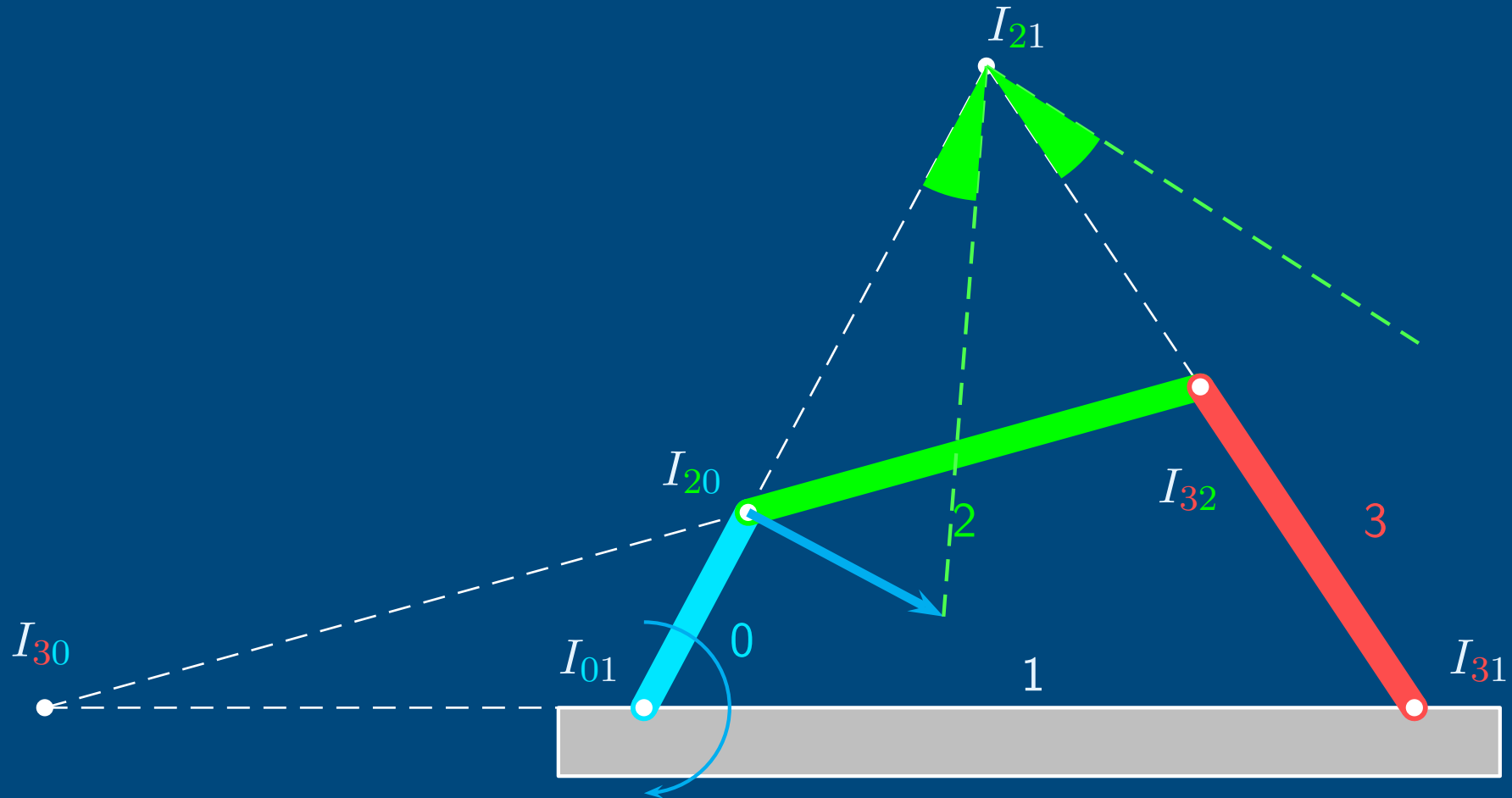
Mecanismo de 4 barras



Aplicaciones: Mecanismos



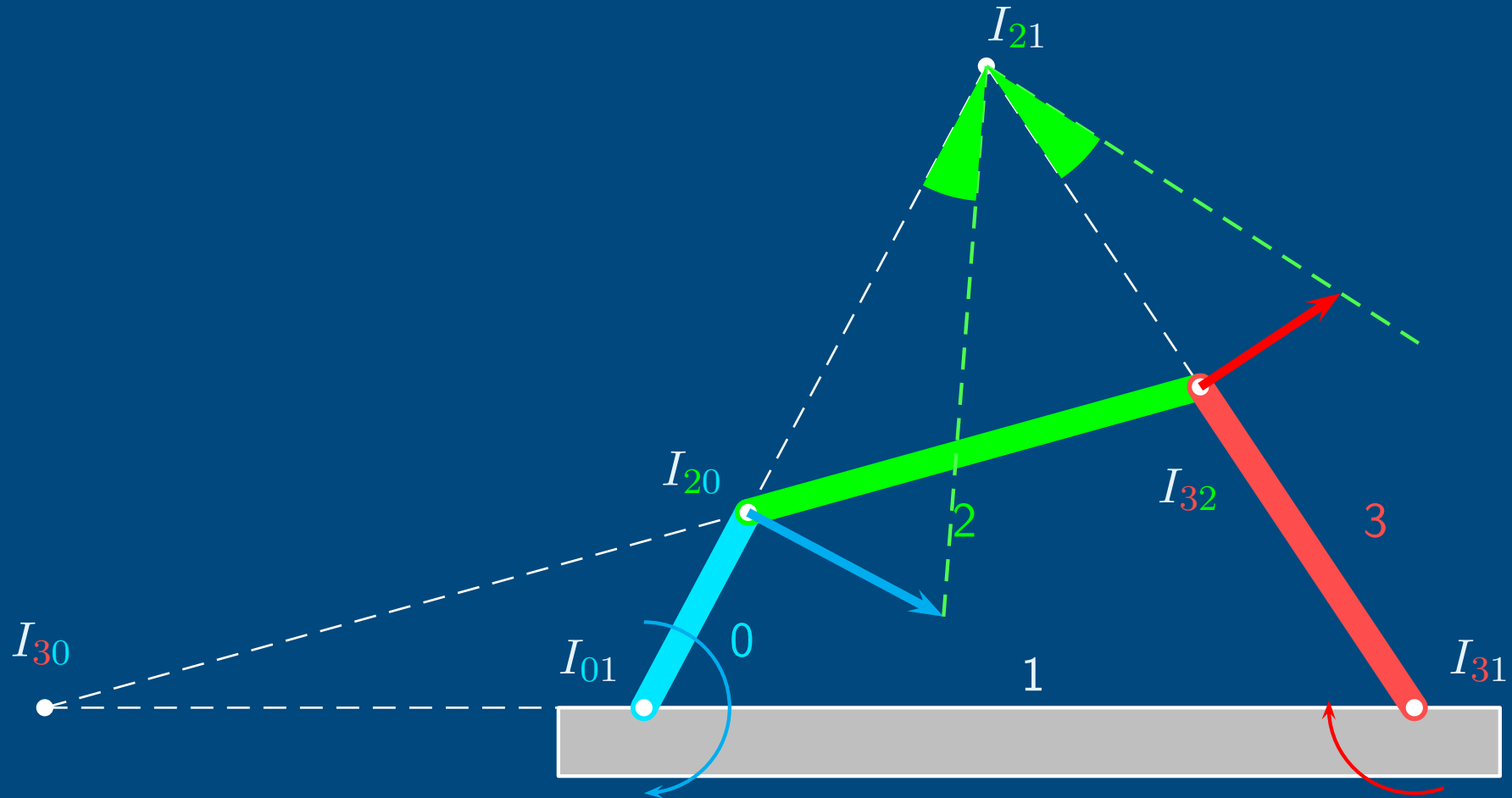
Mecanismo de 4 barras





Aplicaciones: Mecanismos

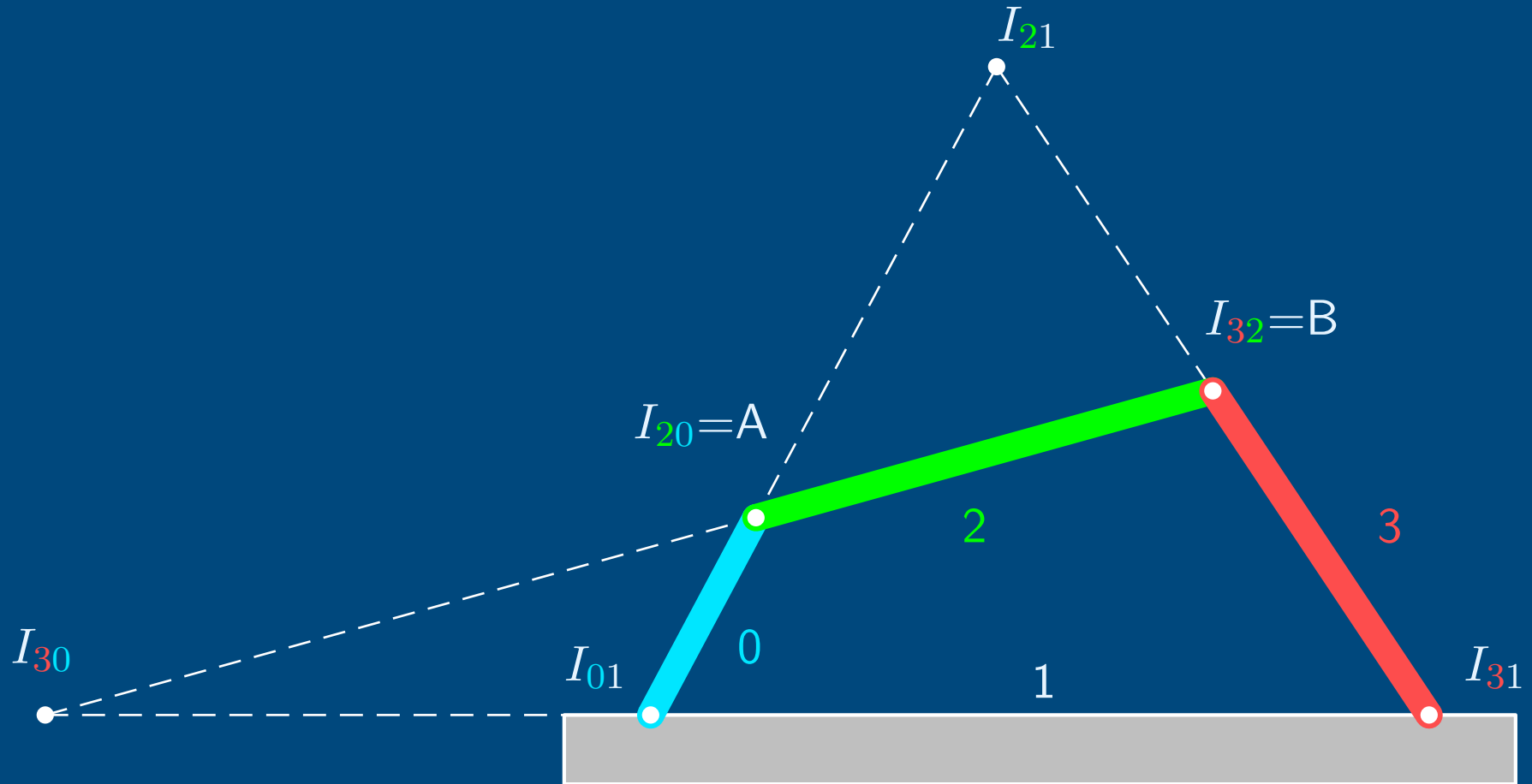
Mecanismo de 4 barras



Aplicaciones: Mecanismos



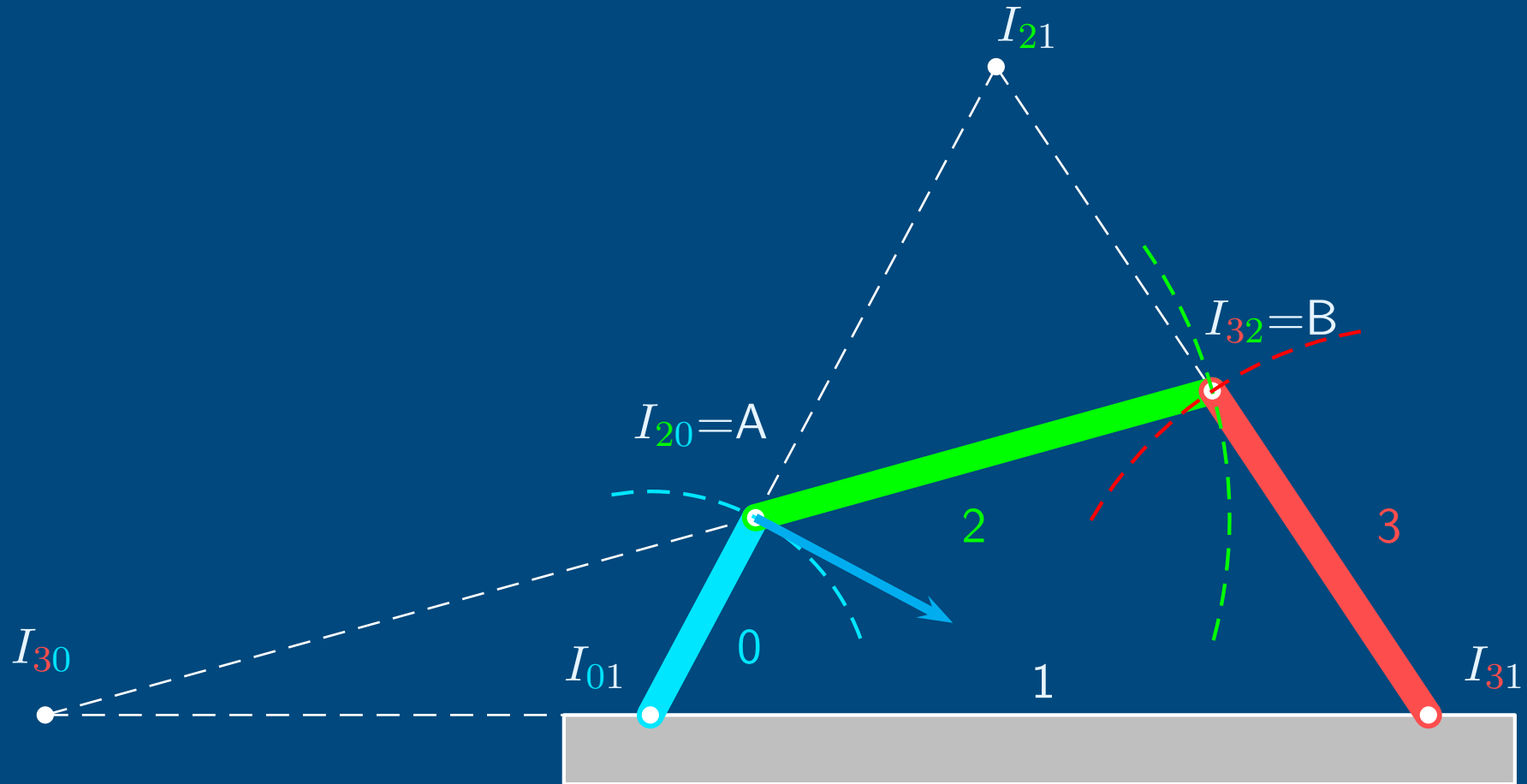
Mecanismo de 4 barras



Aplicaciones: Mecanismos



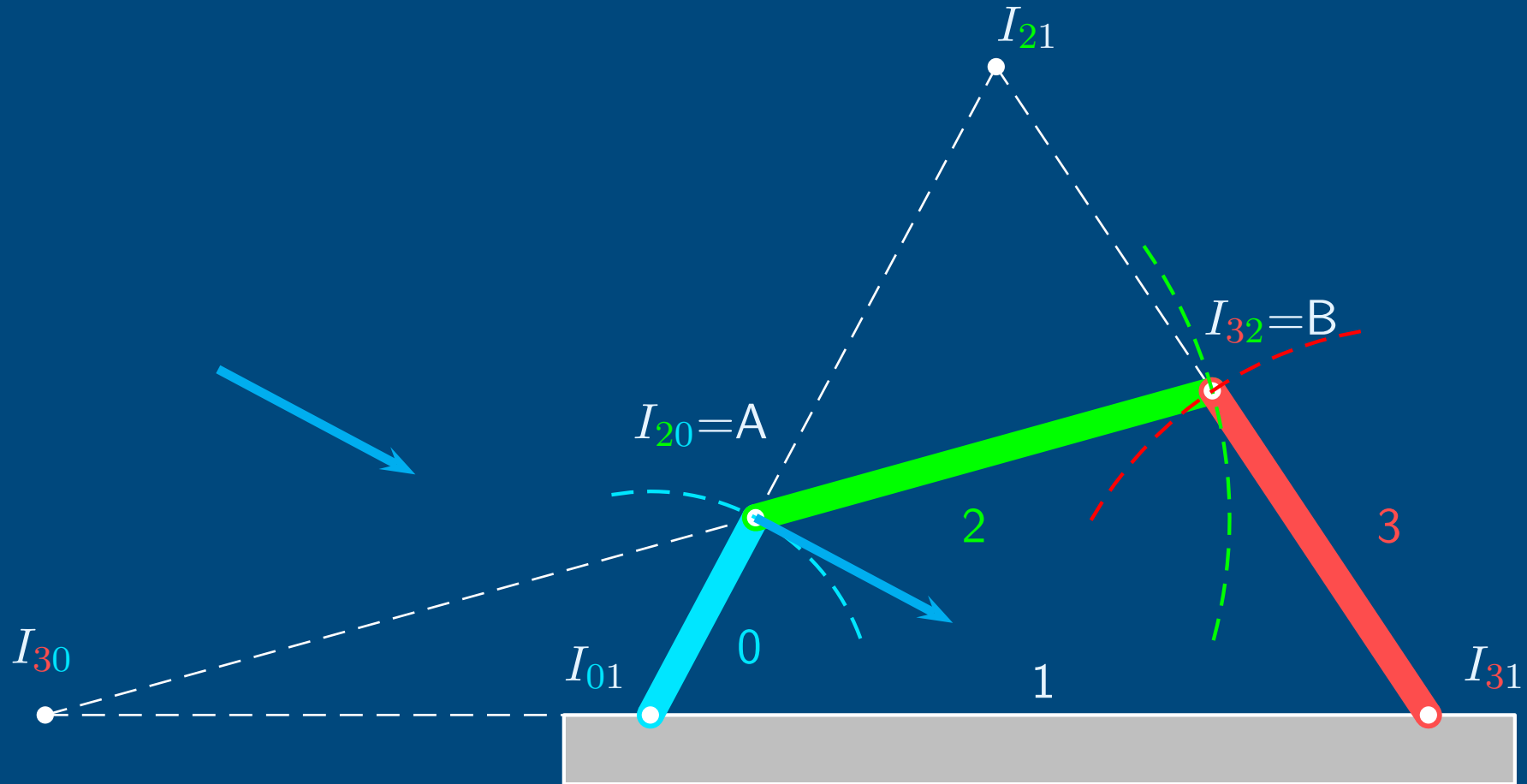
Mecanismo de 4 barras



Aplicaciones: Mecanismos



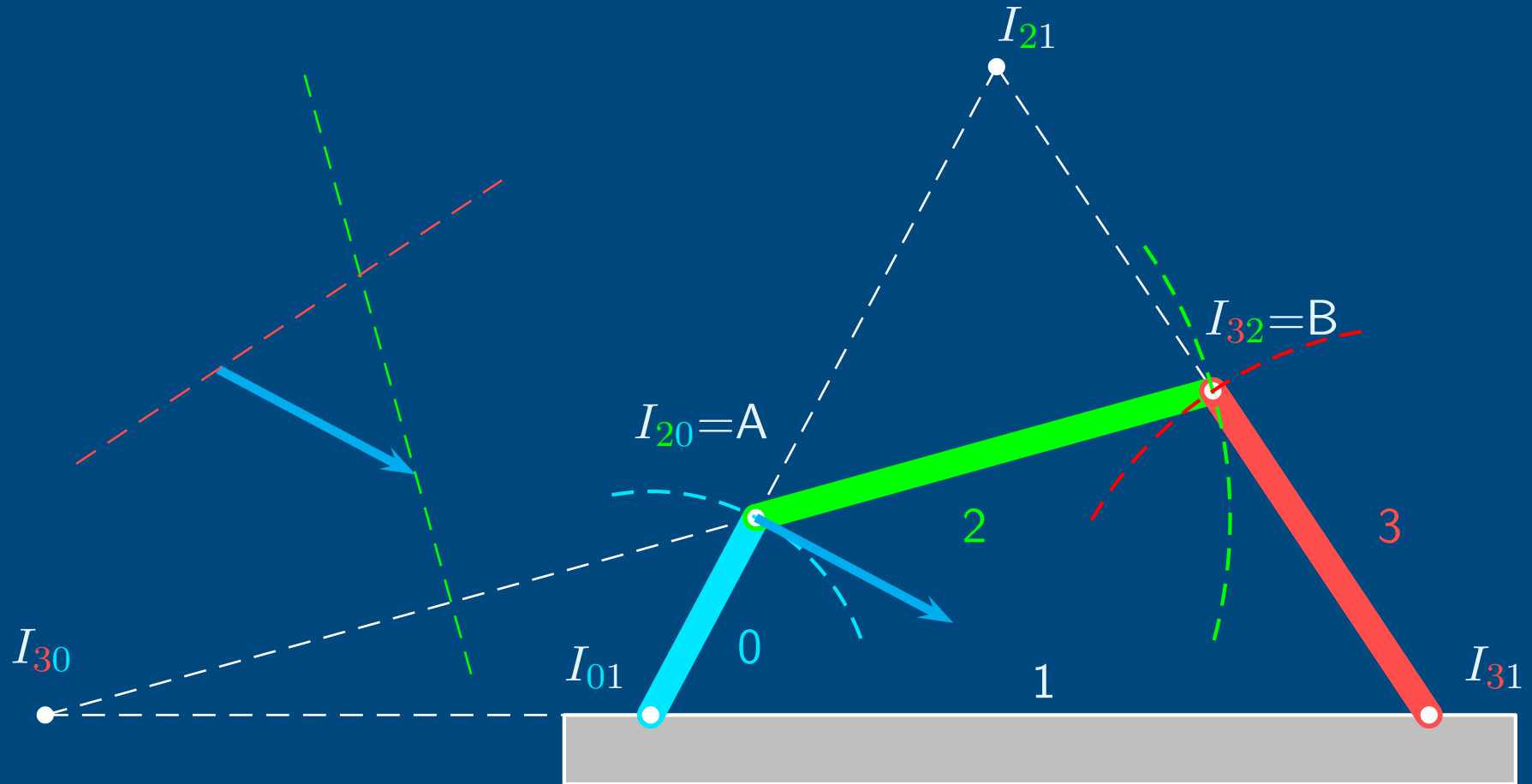
Mecanismo de 4 barras





Aplicaciones: Mecanismos

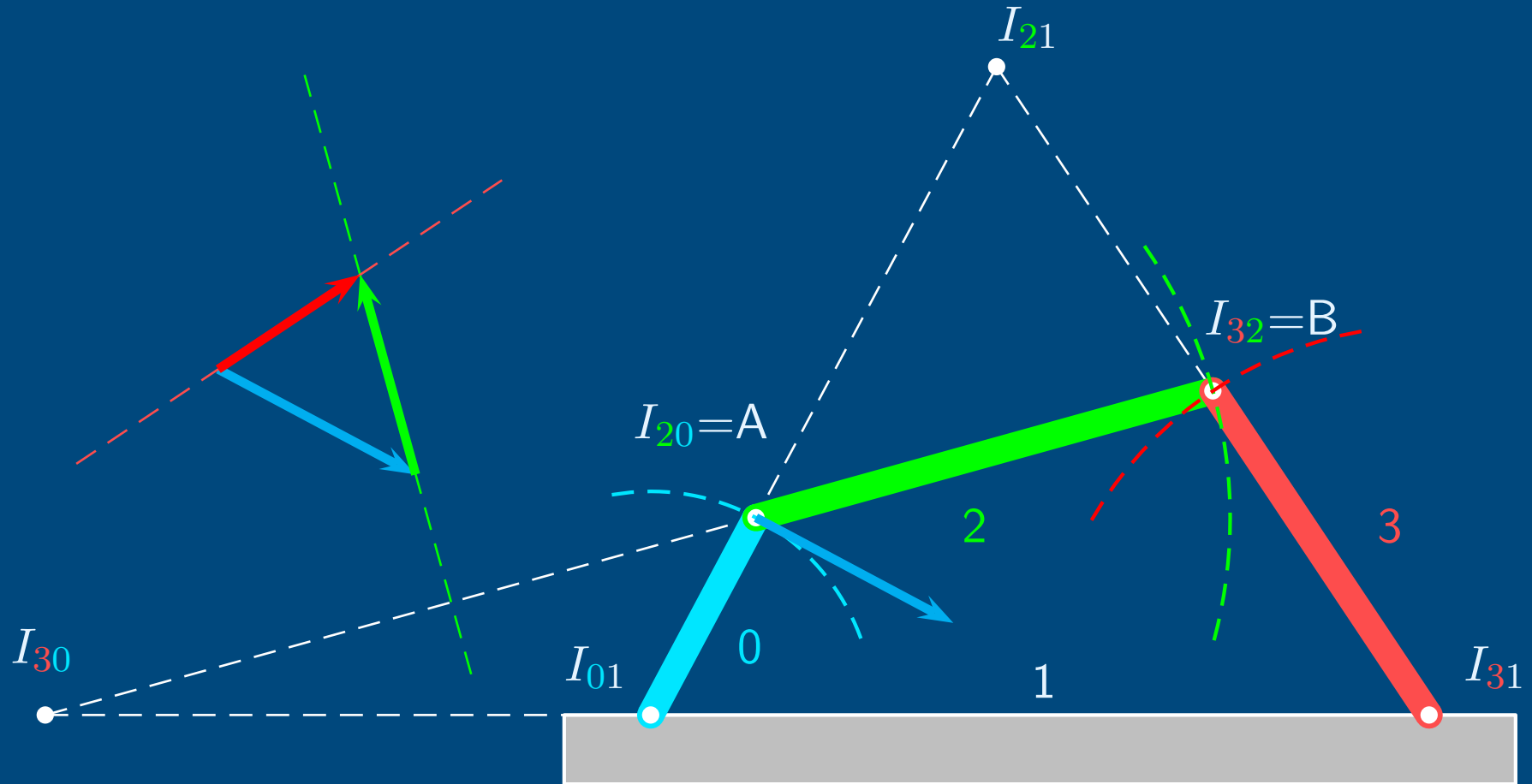
Mecanismo de 4 barras





Aplicaciones: Mecanismos

Mecanismo de 4 barras

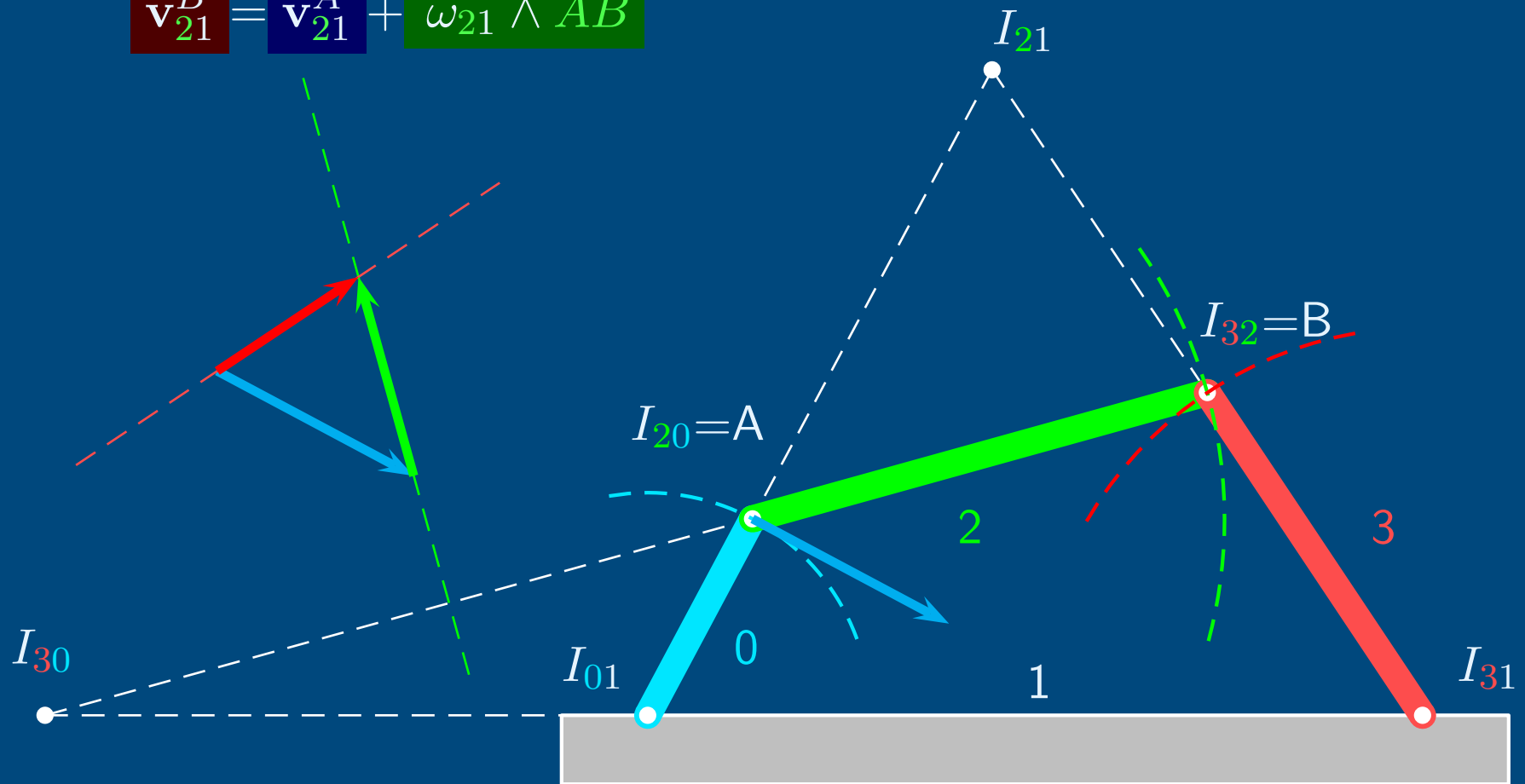




Aplicaciones: Mecanismos

Mecanismo de 4 barras

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \overline{AB}$$

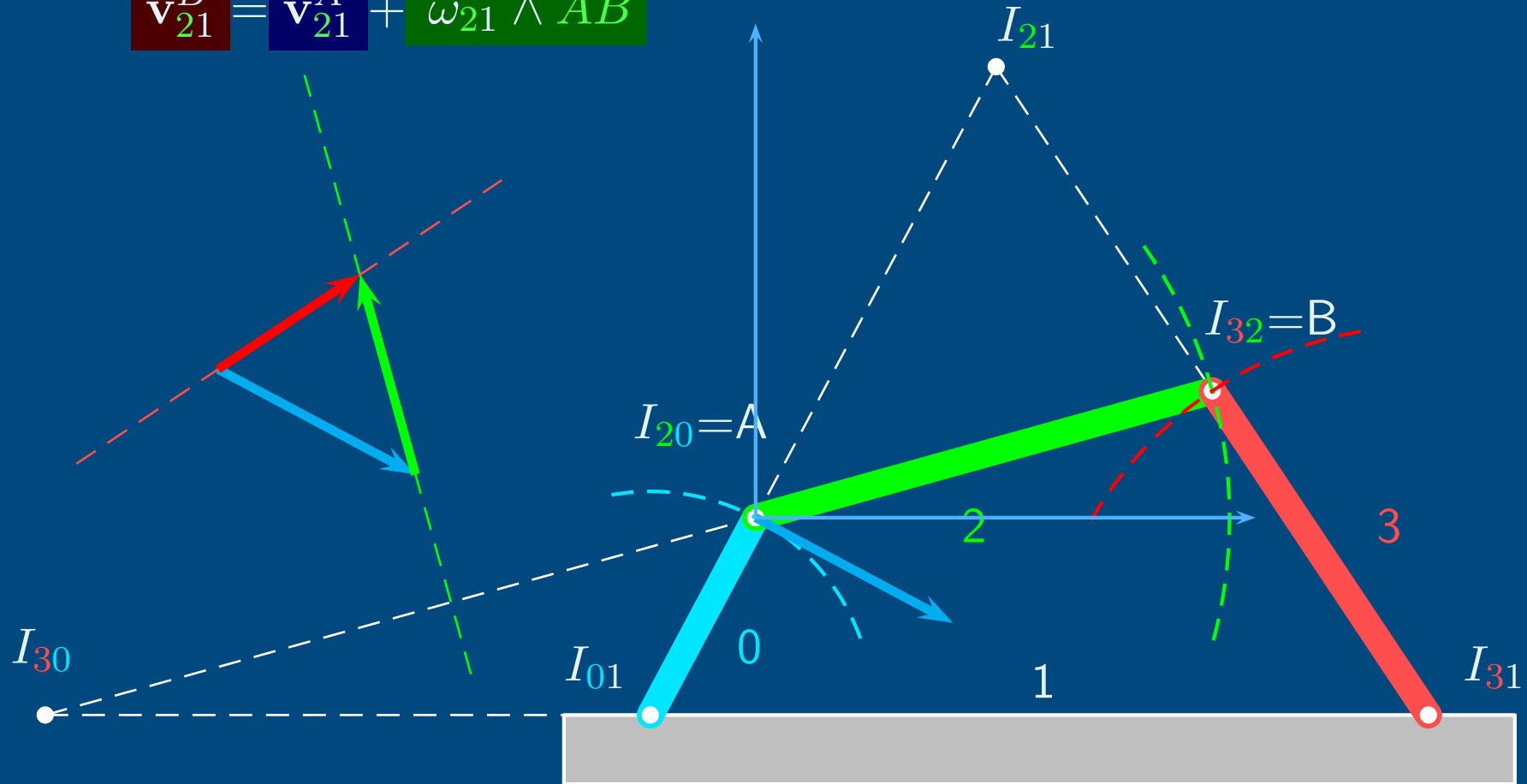




Aplicaciones: Mecanismos

Mecanismo de 4 barras

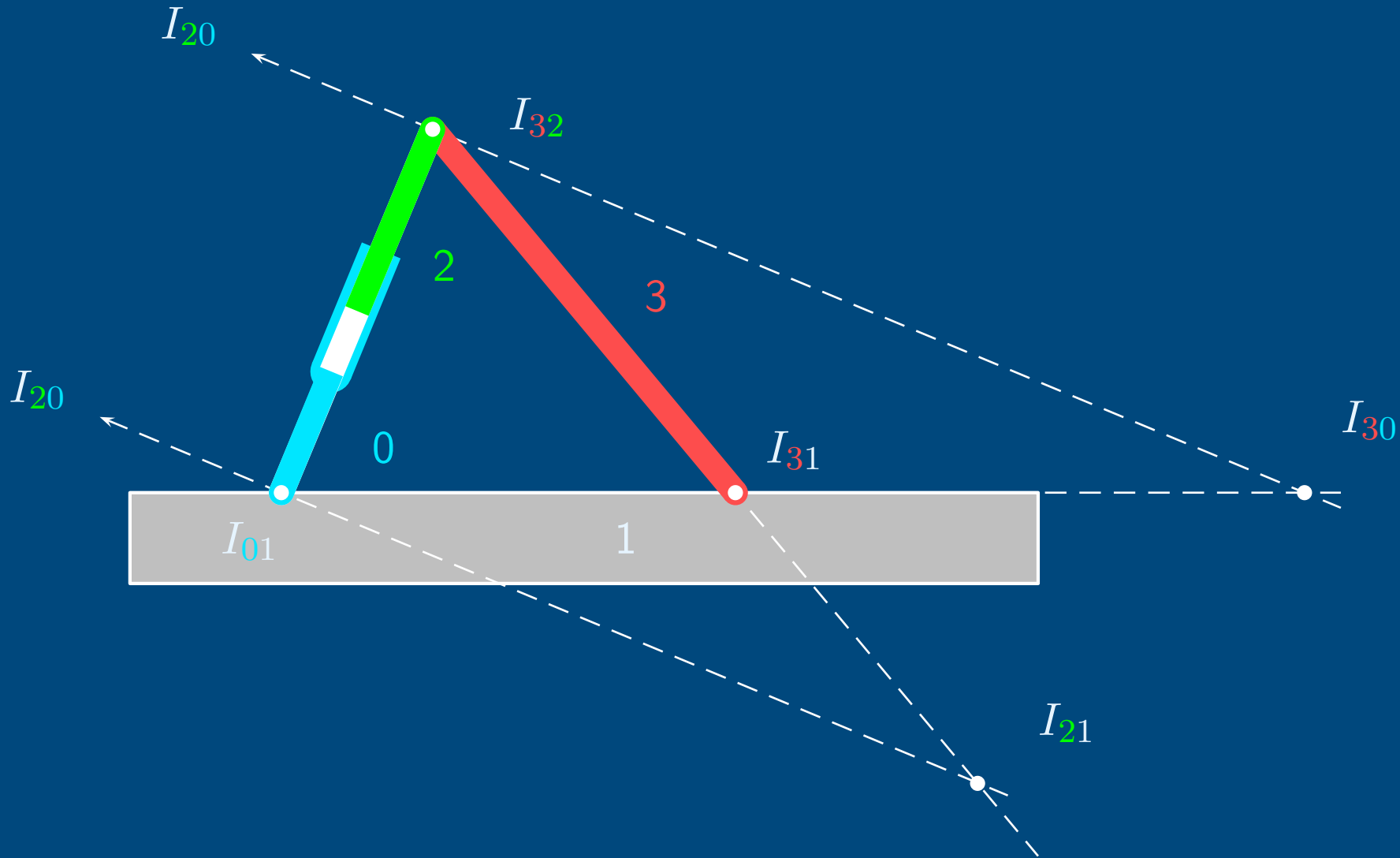
$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \overline{AB}$$



Aplicaciones: Mecanismos

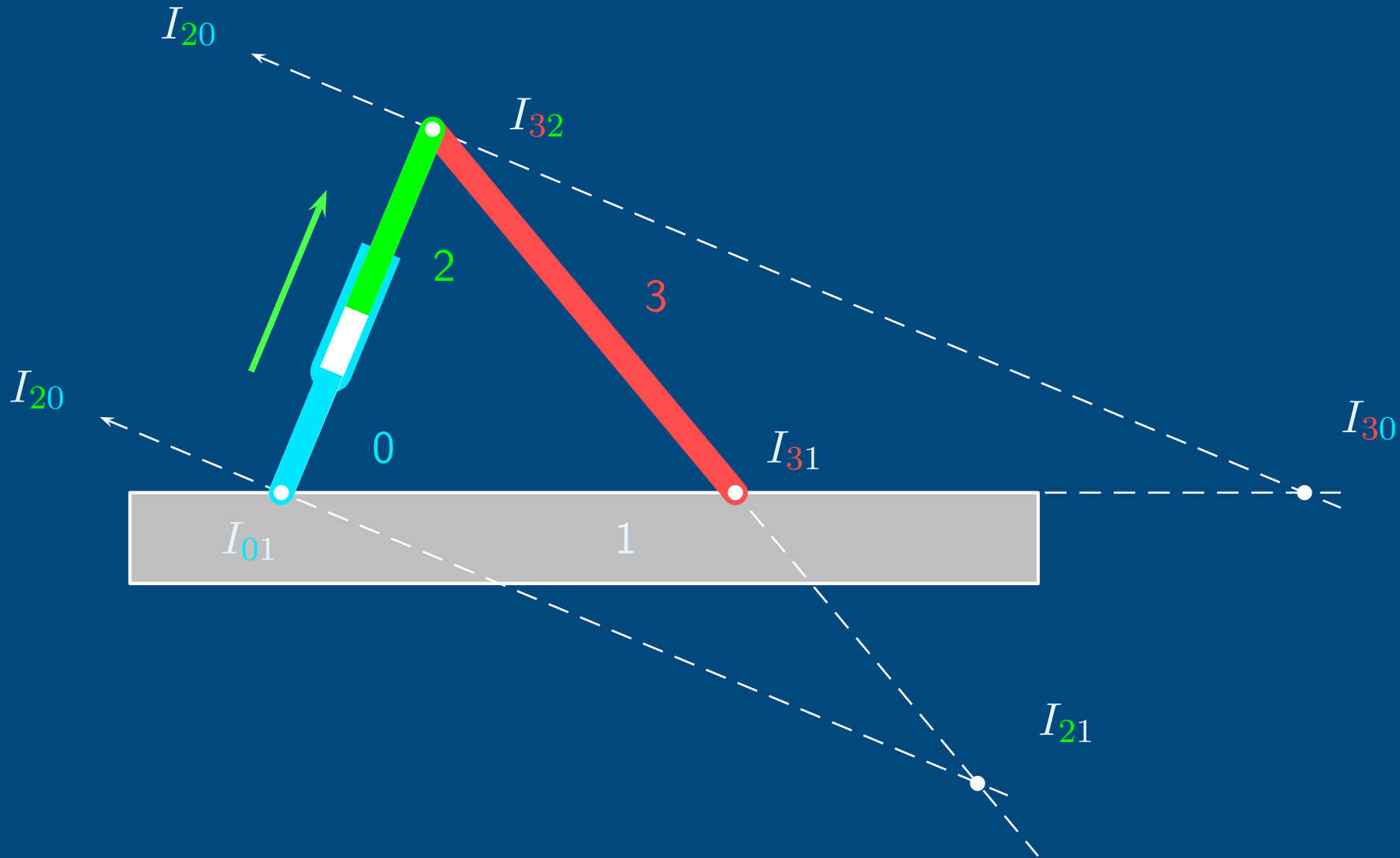


Corredera



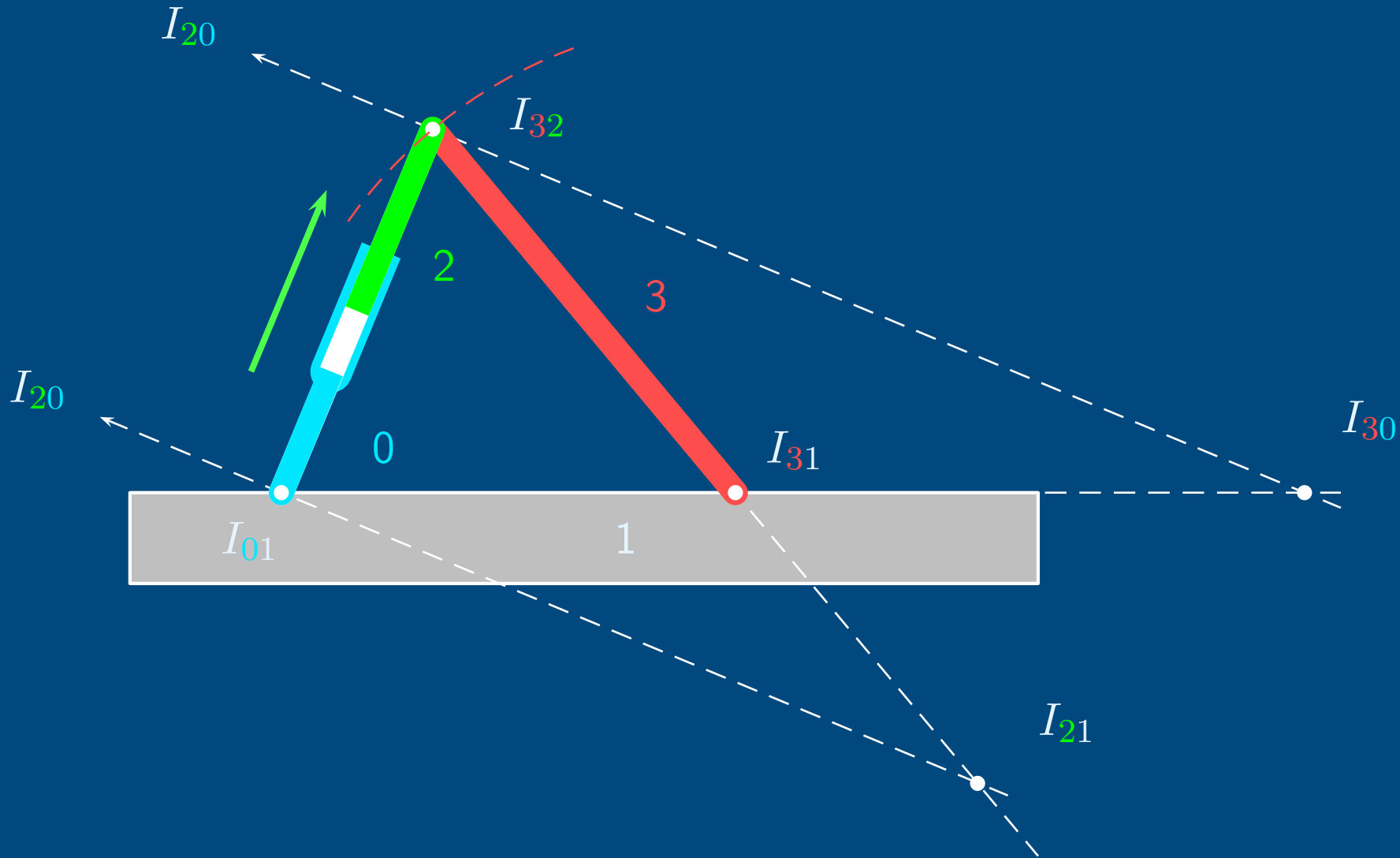


Corredera



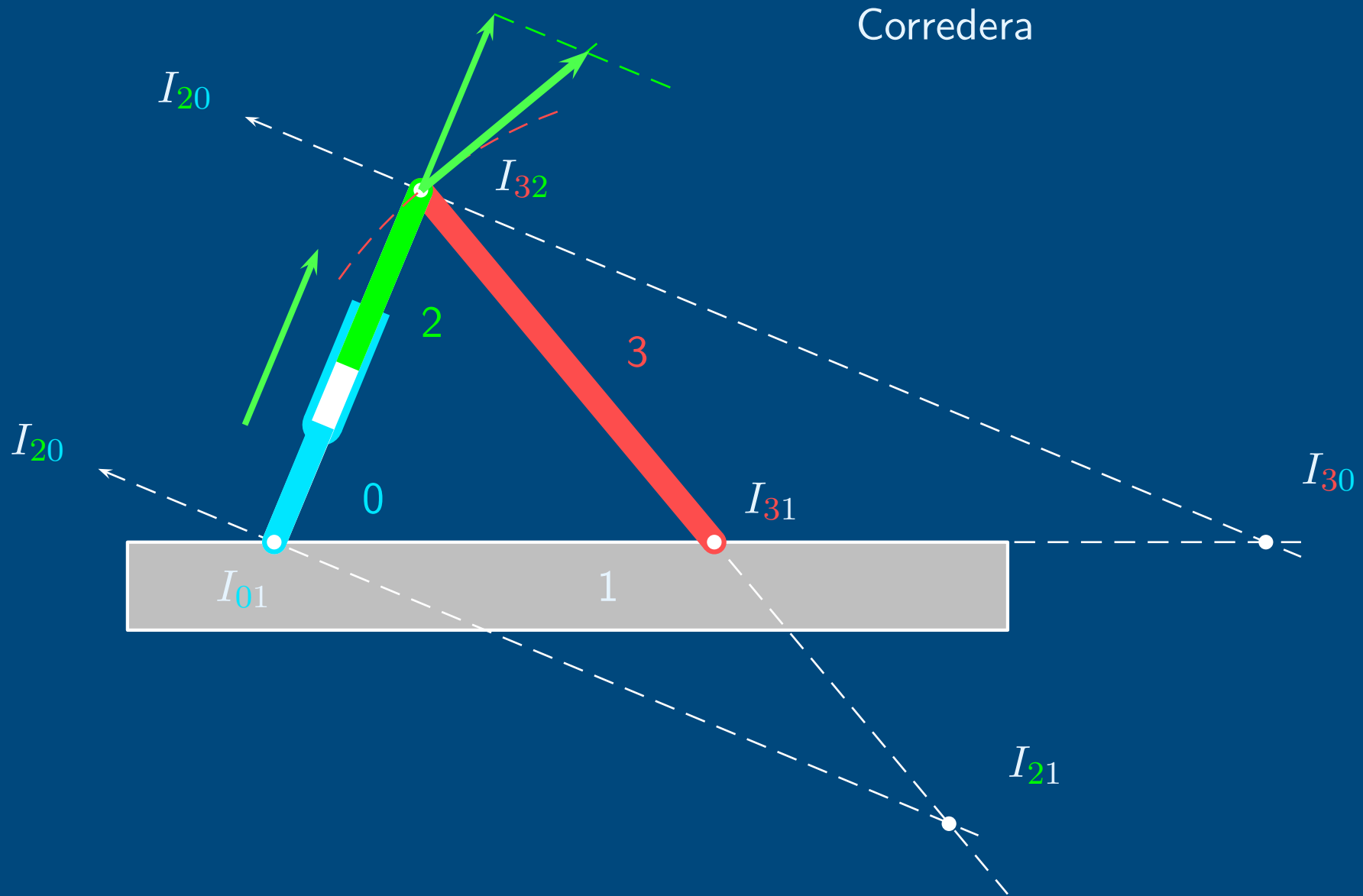


Corredera

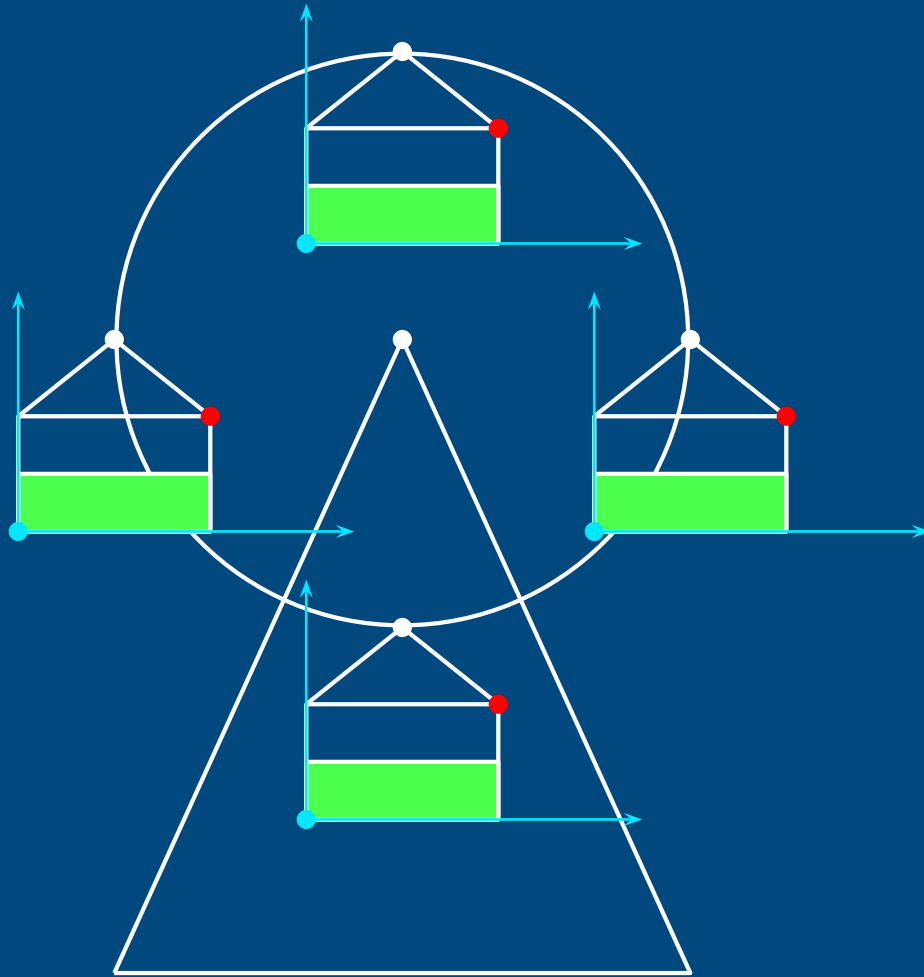




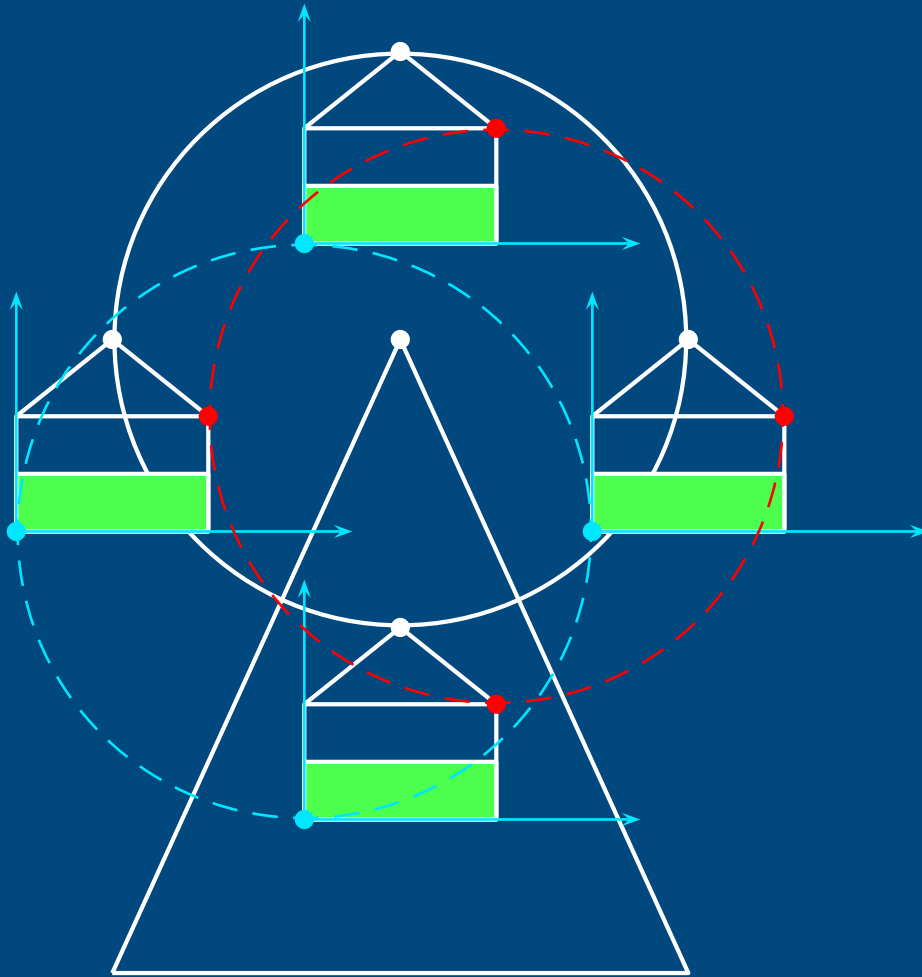
Aplicaciones: Mecanismos



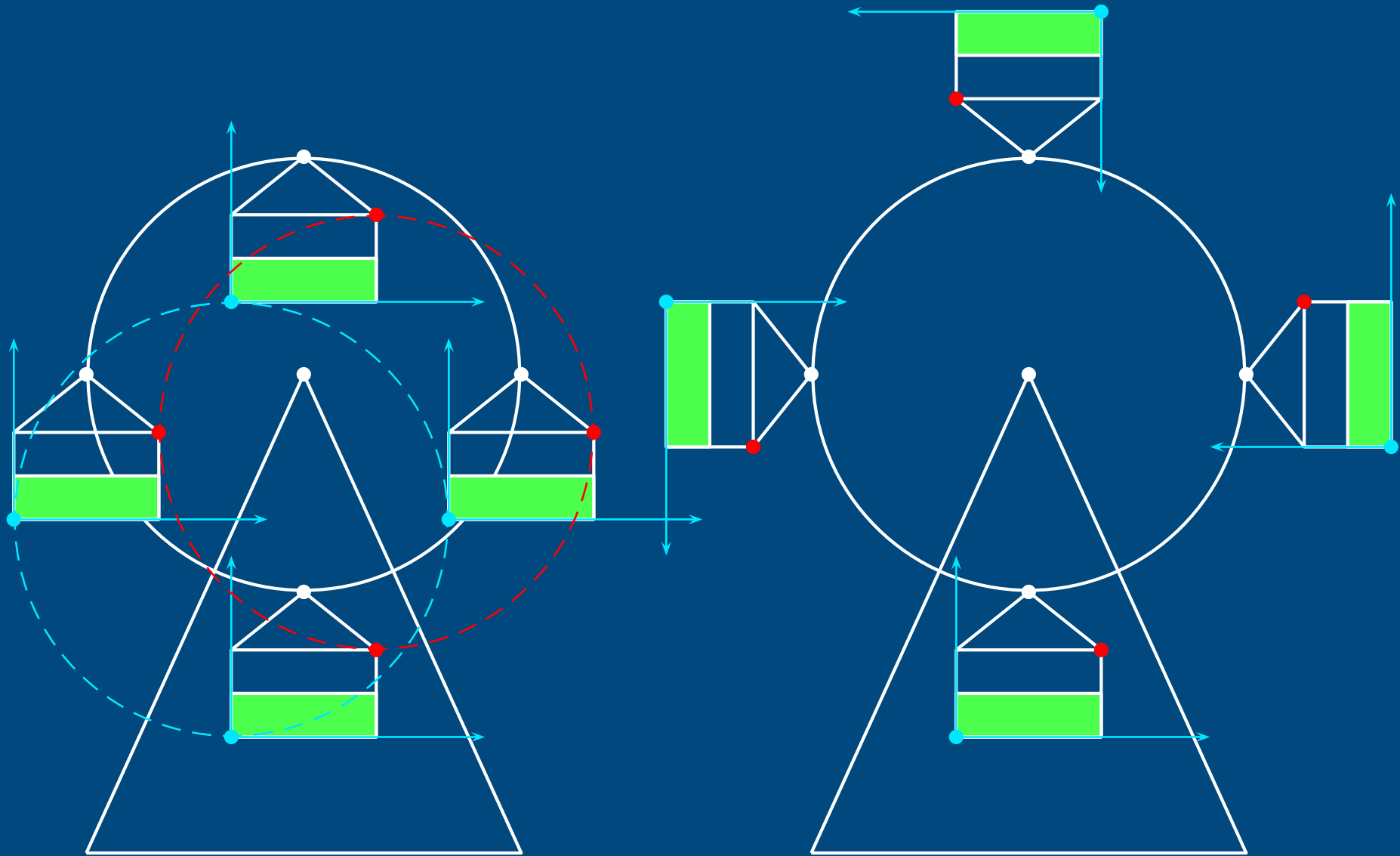
Traslación circular y rotación



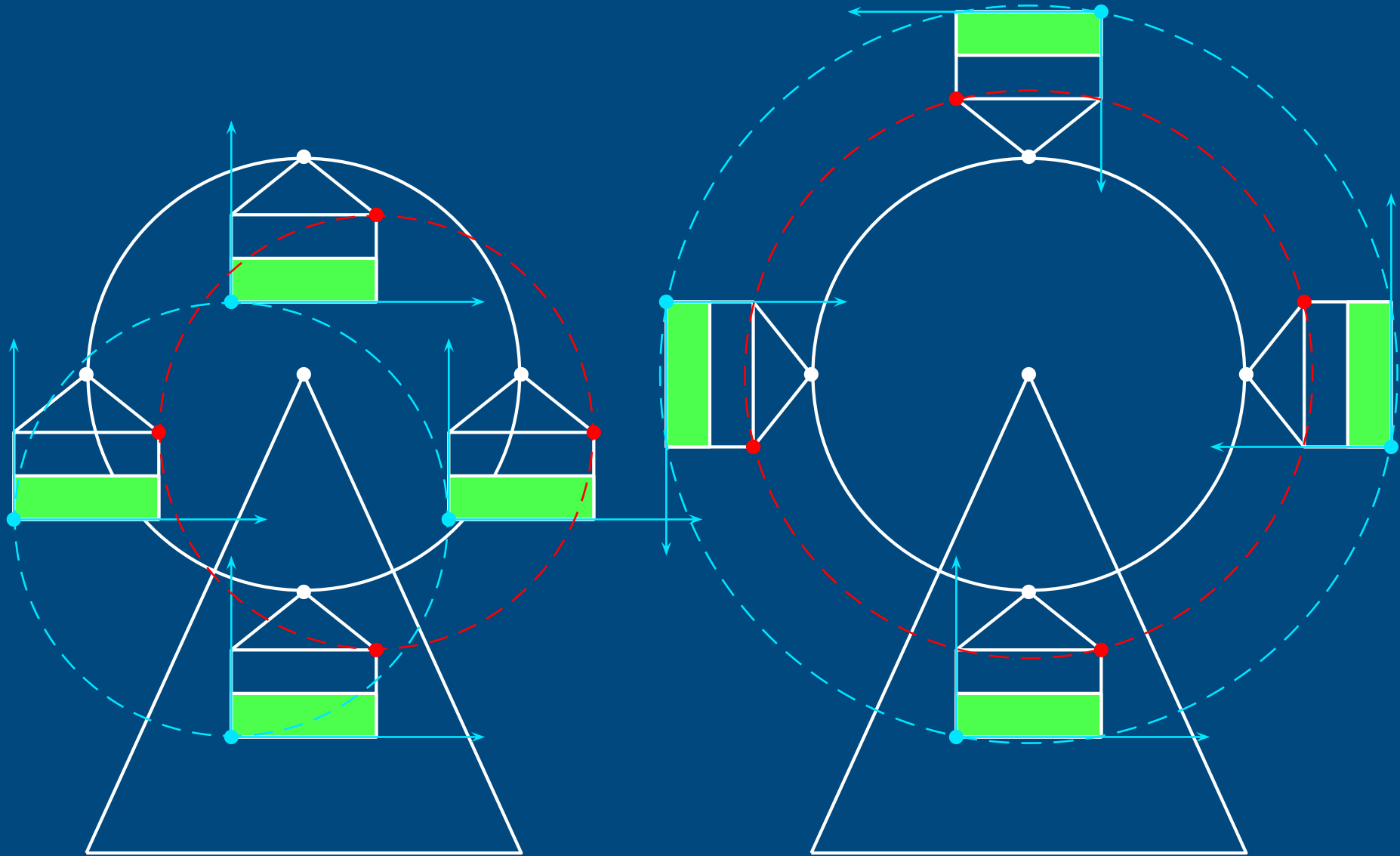
Traslación circular y rotación



Traslación circular y rotación



Traslación circular y rotación

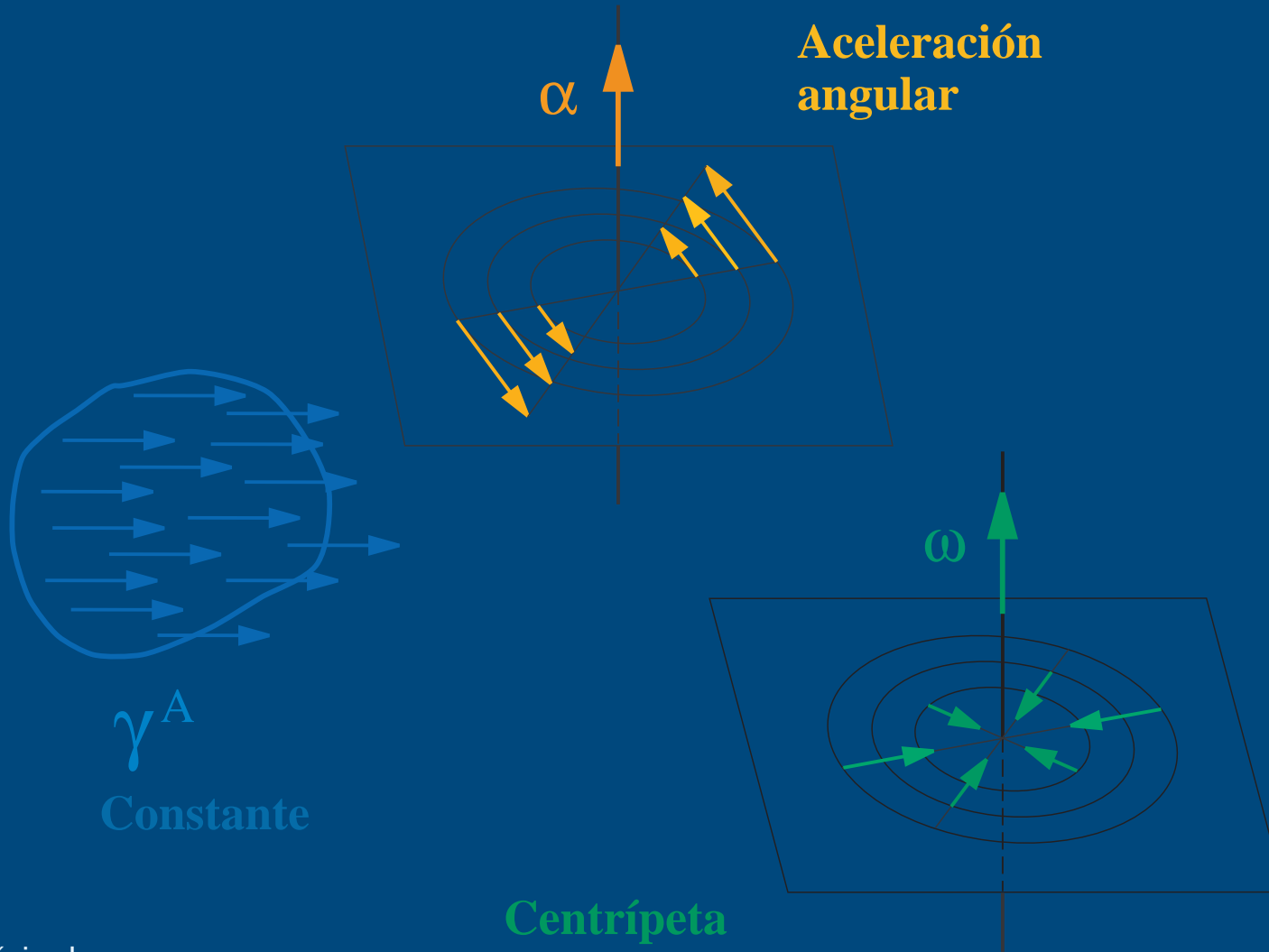




Campo de aceleraciones plano

Los tres campos vectoriales son ahora planos: $\dot{\omega}_{01} \parallel \omega_{01}$

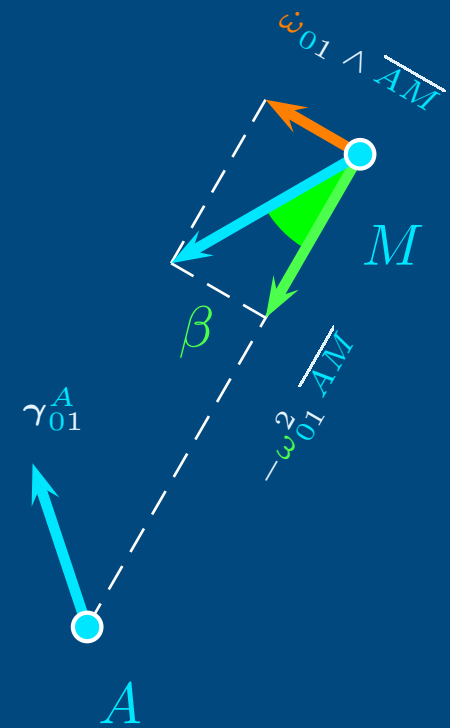
$$\gamma_{01}^M = \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge (\omega_{01} \wedge \overline{AM})$$





Estructura del campo de aceleraciones

$$\begin{aligned}\gamma_{01}^M &= \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge (\omega_{01} \wedge \overline{AM}) = \\ &= \gamma_{01}^A + \underbrace{\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} - \omega_{01}^2 \overline{AM}}\end{aligned}$$



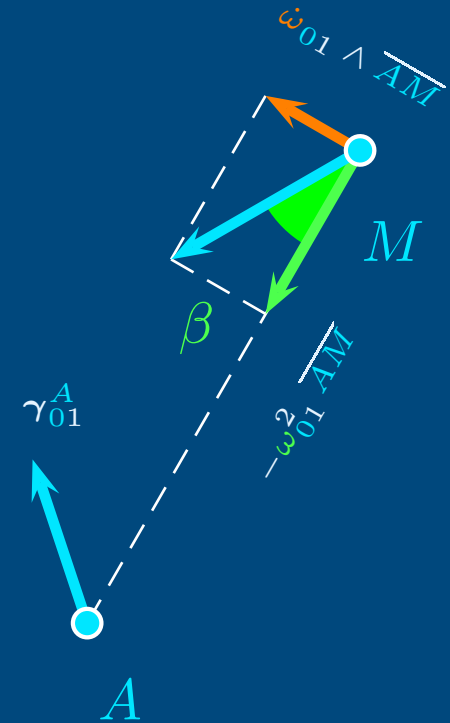


Estructura del campo de aceleraciones

$$\begin{aligned} \gamma_{01}^M &= \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge (\omega_{01} \wedge \overline{AM}) = \\ &= \gamma_{01}^A + \underbrace{\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} - \omega_{01}^2 \overline{AM}} \end{aligned}$$

Términos en $\dot{\omega}$ y ω^2 proporcionales a la distancia \overline{AM} :

$$\tan \beta = \frac{\dot{\omega}_{01}}{\omega_{01}^2}$$





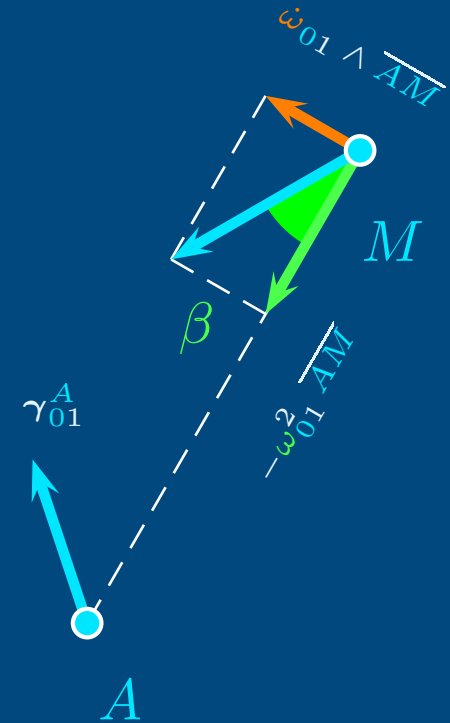
Estructura del campo de aceleraciones

$$\begin{aligned} \gamma_{01}^M &= \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge (\omega_{01} \wedge \overline{AM}) = \\ &= \gamma_{01}^A + \underbrace{\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} - \omega_{01}^2 \overline{AM}} \end{aligned}$$

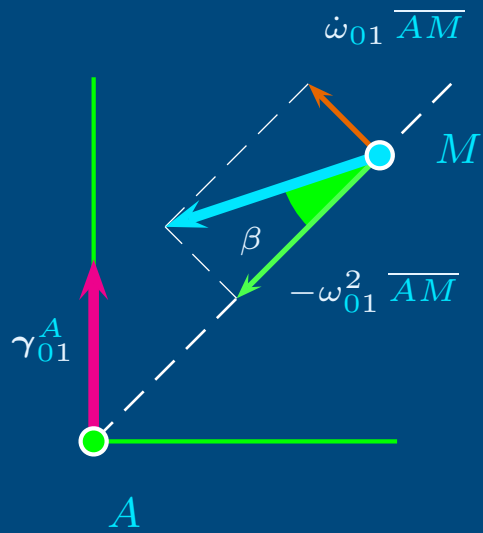
Términos en $\dot{\omega}$ y ω^2 proporcionales a la distancia \overline{AM} :

$$\tan \beta = \frac{\dot{\omega}_{01}}{\omega_{01}^2}$$

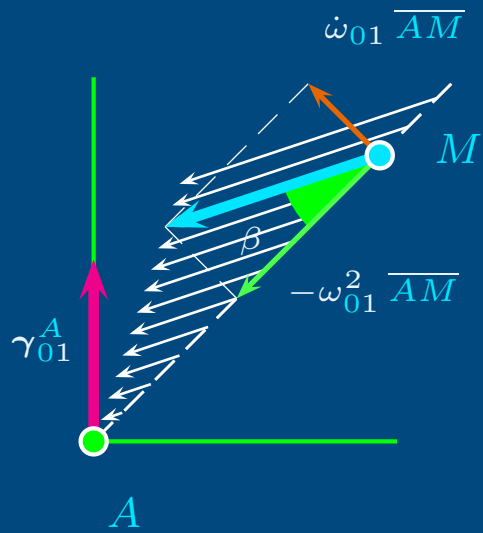
β Constante para todo el campo de aceleraciones en cada instante, pero varía con el tiempo.



Estructura del campo de aceleraciones

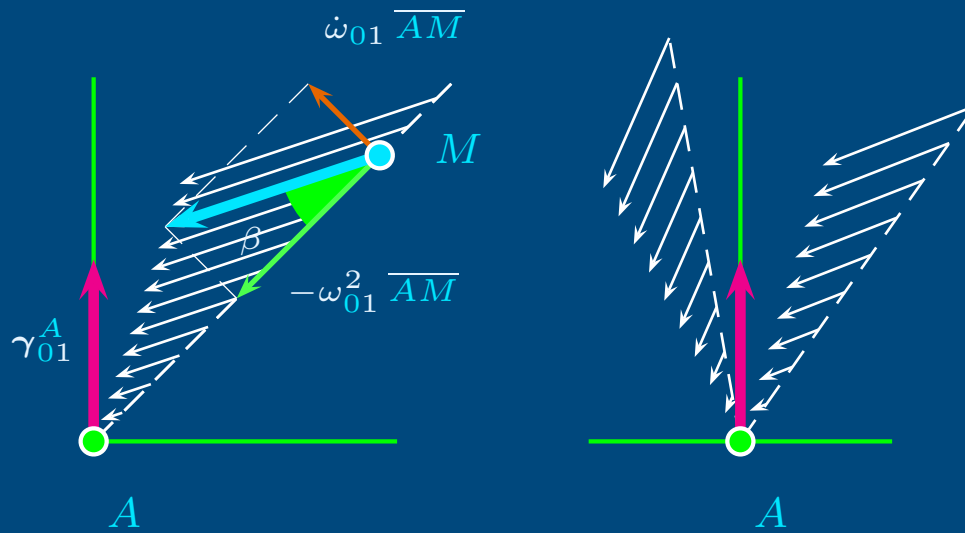


Estructura del campo de aceleraciones



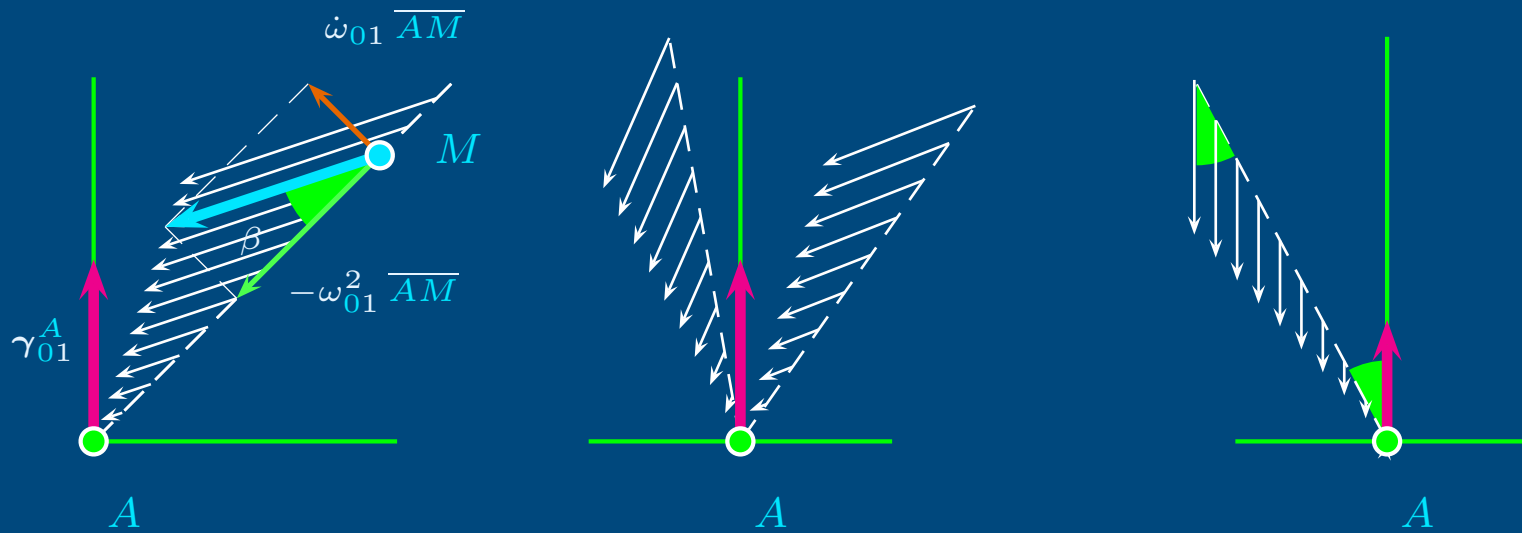


Estructura del campo de aceleraciones



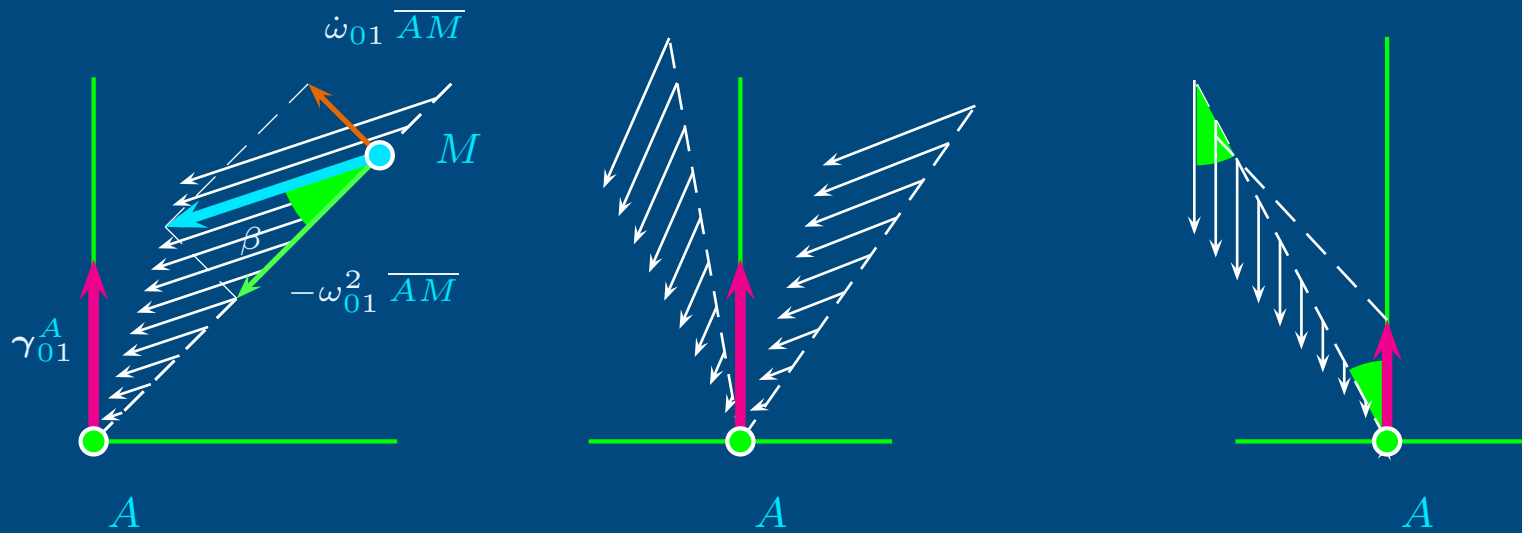


Estructura del campo de aceleraciones



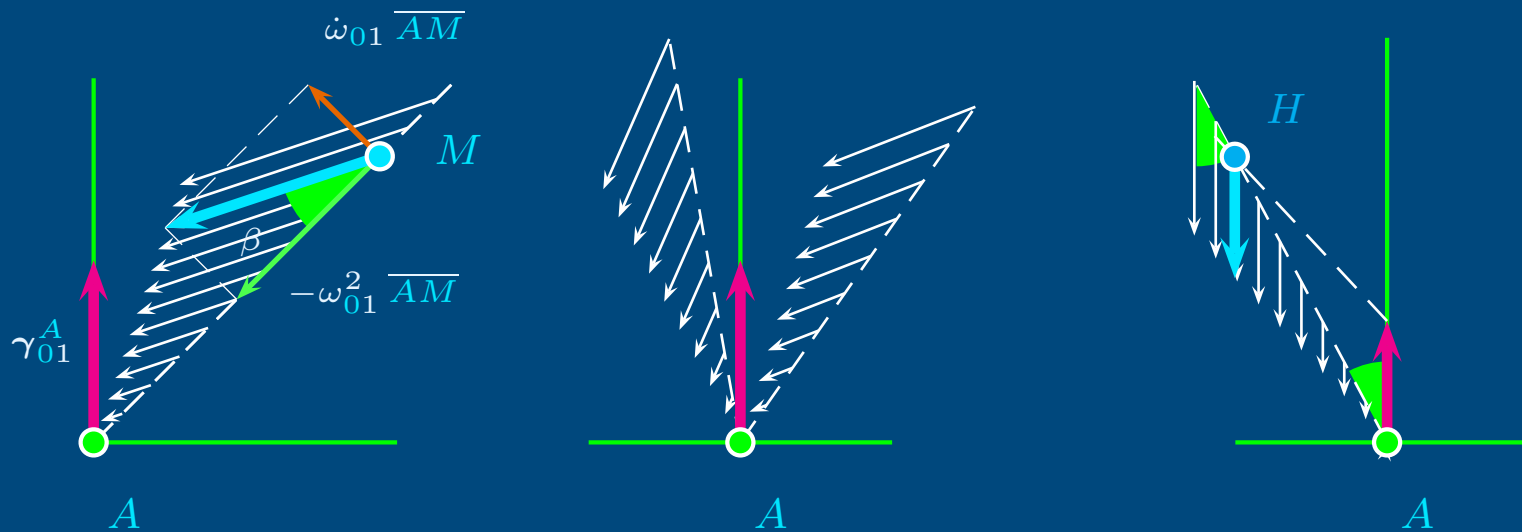


Estructura del campo de aceleraciones





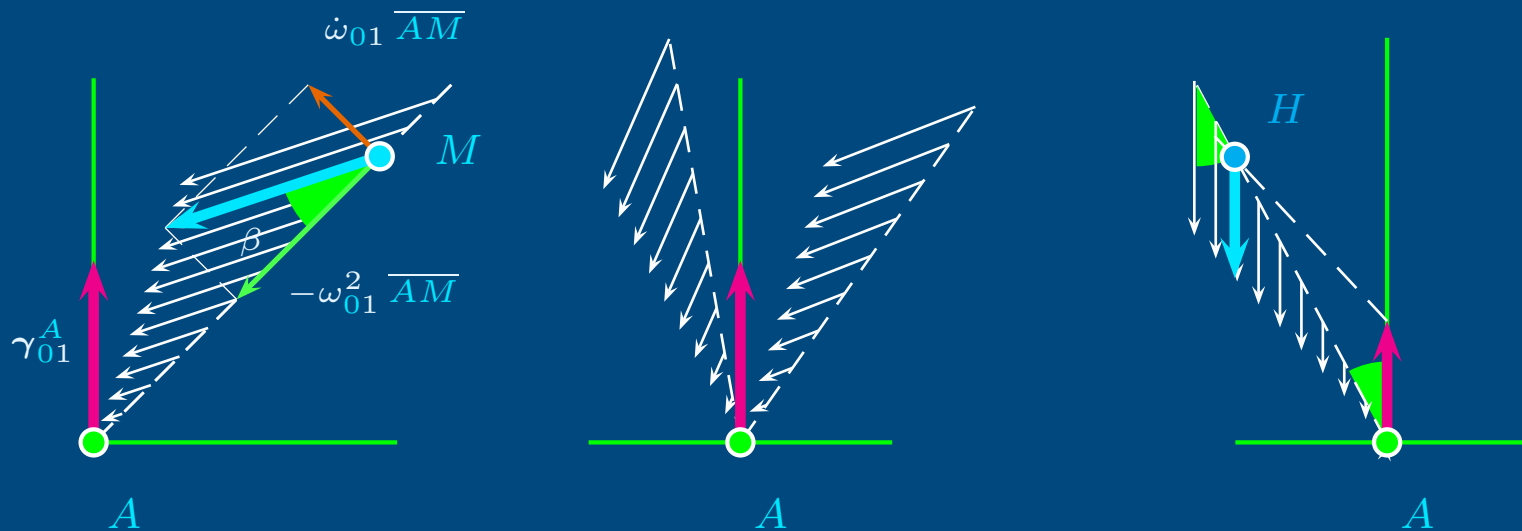
Estructura del campo de aceleraciones



$$\gamma_{01}^H = 0 \quad \Rightarrow \quad H \text{ Centro de aceleraciones}$$



Estructura del campo de aceleraciones



$$\gamma_{01}^H = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad H \text{ Centro de aceleraciones}$$

Por ser paralelos ω_{01} y $\dot{\omega}_{01}$, hay una estructura similar a la del campo de velocidades. En el movimiento general no existe.



Centro de aceleraciones

- El centro de aceleraciones H se puede determinar analíticamente:

$$\gamma_{01}^H = \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH} - \omega_{01}^2 \overline{AH} = 0$$





Centro de aceleraciones

- El centro de aceleraciones H se puede determinar analíticamente:

$$\gamma_{01}^H = \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH} - \omega_{01}^2 \overline{AH} = 0$$

- Multiplicando vectorialmente por $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A - \dot{\omega}_{01}^2 \overline{AH} - \omega_{01}^2 (\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}) = 0$$





Centro de aceleraciones

- El centro de aceleraciones H se puede determinar analíticamente:

$$\gamma_{01}^H = \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH} - \omega_{01}^2 \overline{AH} = 0$$

- Multiplicando vectorialmente por $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A - \dot{\omega}_{01}^2 \overline{AH} - \omega_{01}^2 (\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}) = 0$$

- y sustituyendo $\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}$ de la primera expresión,

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A - \dot{\omega}_{01}^2 \overline{AH} - \omega_{01}^2 (\omega_{01}^2 \overline{AH} - \gamma_{01}^A) = 0$$





Centro de aceleraciones

- El centro de aceleraciones H se puede determinar analíticamente:

$$\gamma_{01}^H = \gamma_{01}^A + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH} - \omega_{01}^2 \overline{AH} = 0$$

- Multiplicando vectorialmente por $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A - \dot{\omega}_{01}^2 \overline{AH} - \omega_{01}^2 (\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}) = 0$$

- y sustituyendo $\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}$ de la primera expresión,

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A - \dot{\omega}_{01}^2 \overline{AH} - \omega_{01}^2 (\omega_{01}^2 \overline{AH} - \gamma_{01}^A) = 0$$

- Por tanto,

$$\overline{AH} = \frac{\dot{\omega}_{01} \wedge \gamma_{01}^A + \omega_{01}^2 \gamma_{01}^A}{\dot{\omega}_{01}^2 + \omega_{01}^4}$$

