Introducción a la Mecánica Analítica

Mecánica II

Tema 5

Manuel Ruiz Delgado

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos

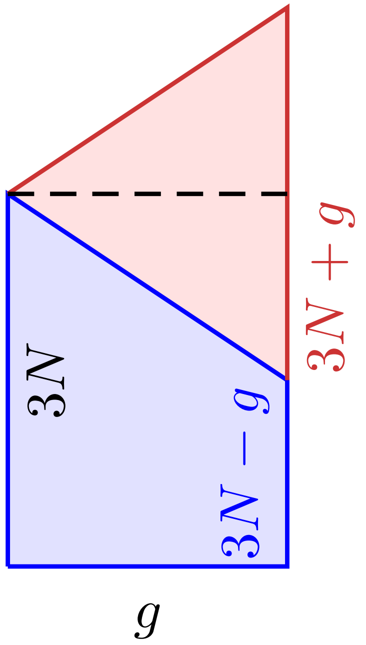
Universidad Politécnica de Madrid

Mecánica analítica

- Sistemas materiales
- Ligaduras
  - Sistemas holónomos
  - Sistemas no holónomos
- Coordenadas generalizadas
- Espacio de configuración
- Desplazamientos, velocidades y trabajos
  - Desplazamientos virtuales
  - Desplazamientos posibles
  - Desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras
- Fuerzas de ligadura
- Trabajo virtual
- Ligaduras ideales y fuerzas de ligadura

Sistemas materiales

- Sistema formado por N partículas materiales sujetas a ligaduras
  - $3N$ coordenadas: $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$
  - g ligaduras **independientes**
  - $n = 3N - g$ grados de libertad (GDL)
- Mecánica Newtoniana: introducir incógnitas/ecuaciones de ligadura
  - $3N + g$ ecuaciones
  - $3N + g$ incógnitas
- Mecánica Analítica: 1 ecuación para cada grado de libertad
  - $3N - g$ ecuaciones
  - $3N - g$ incógnitas
- Superficie: proyectar sobre el plano tangente
- Curva: proyectar sobre la tangente



Ligaduras: Clasificación

<table>
<tr><th>Ligadura</th><th>Descripción</th><th>Sistema</th></tr>
<tr><td>Finita/geométrica</td><td>$f(\mathbf{r}_i, t) = 0$</td><td rowspan="2">Holónomo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cinemática
integrable
no integrable</td><td>$\sum \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + D = 0$
$= \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}_i, t)$</td></tr>
<tr><td>$\neq \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}_i, t)$</td><td>No Holónomo</td></tr>
<tr><td>Estacionaria</td><td>$f(\mathbf{r}_i) = 0$</td><td>Esclerónomo</td></tr>
<tr><td>No estacionaria</td><td>$f(\mathbf{r}_i, t) = 0$</td><td>Reónomo</td></tr>
<tr><td>Bilateral</td><td>$f(\mathbf{r}_i, t) = 0$</td><td>Igual siempre</td></tr>
<tr><td>Unilateral</td><td>$f(\mathbf{r}_i, t) \geq 0$</td><td>Libre/ligado</td></tr>
</table>

Ligaduras finitas: $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0$

- Partícula sobre superficie esférica: $N = 1$; coordenadas: $3N$; ligaduras: $g = 1$; GDL: $n = 3N - g = 2$

$$\text{Esfera fija:} \quad f(\mathbf{r}) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\text{Globo esférico:} \quad f(\mathbf{r}, t) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 = 0$$

- Dos partículas unidas por una barra: $N = 2$; coordenadas: $3N$; ligaduras: $g = 1$; GDL: $n = 3N - g = 5$

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - L^2 = 0$$

- Si la barra es telescópica:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \equiv (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - L(t)^2 = 0$$

Ligaduras independientes: Jacobiano

- g ligaduras independientes: Jacobiano $[\partial f_i/\partial x_j]$ rango $= g$
- g ligaduras redundantes: Jacobiano $[\partial f_i/\partial x_j]$ rango $< g$

Ej.: Sistema: partícula sujeta a tres ligaduras:

- Esfera de centro el origen: $f_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
- Plano horizontal: $f_2 \equiv z = 0$
- Cilindro vertical: $f_3 \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0$

La tercera ligadura es redundante:

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \\ z \\ x^2 + y^2 - R^2 \end{matrix} \right\} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Rango}\,(\mathbf{J}) = 2$$

Ligaduras independientes: Jacobiano

Ej.: Dos partículas ($N = 2$) en el plano ($2N$ en vez de $3N$) sujetas a:

$$f_1 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 4R^2 = 0$$
$$f_2 \equiv y_2 = 0$$
$$f_3 \equiv x_1^2 + (y_1 - R)^2 - R^2 = 0$$

GDL: $n = 2N - g = 4 - 3 = 1$. Calculamos el jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2\,(x_2 - x_1) & -2\,(y_2 - y_1) & 2\,(x_2 - x_1) & 2\,(y_2 - y_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 2\,(y_1 - R) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente, Rango$(\mathbf{J}) = 3 \quad \Rightarrow \quad$ **independientes**

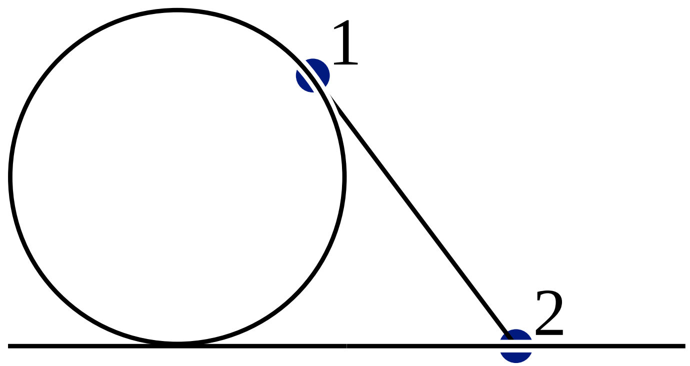
Ligaduras independientes: Jacobiano

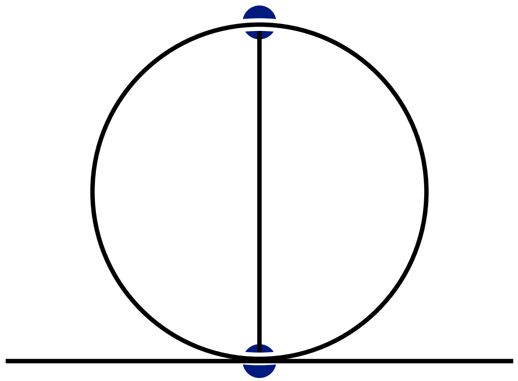
- Son independientes en general
- Pero pueden hacerse redundantes en algunos puntos:

Si colocamos la varilla vertical, $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = 2R$, el jacobiano se reduce a:

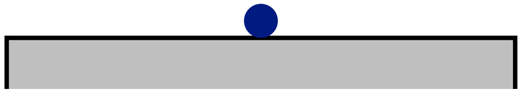
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 4R & 0 & -4R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente, $\text{Rango}(\mathbf{J}) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ **redundantes**.

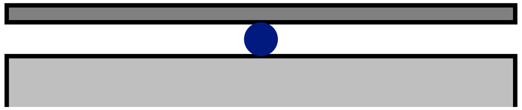




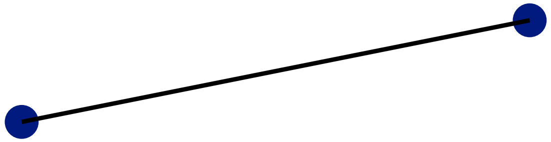
Ligaduras unilaterales/bilaterales



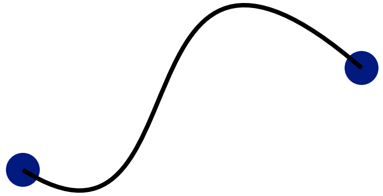
$z \geq 0$



$z = 0$



Ligadas (=)
$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = L$



Libres (<)
$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < L$

- Integrar las ecuaciones con ligadura
- Comprobar cuándo se separa
- Integrar las ecuaciones sin ligadura con las condiciones iniciales de la separación
- Comprobar si vuelve a cumplirse . . .

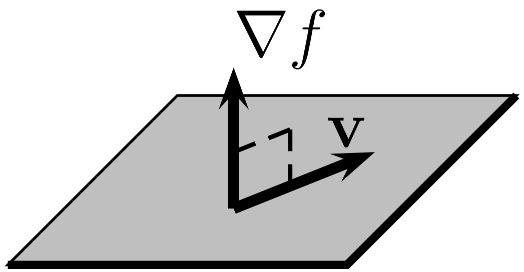
- Toda limitación de las coordenadas limita también las posiciones

$$f(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}_i, t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_N}\dot{y}_N + \frac{\partial f}{\partial z_N}\dot{z}_N + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= \nabla_1 f \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \cdots + \nabla_N f \cdot \dot{\mathbf{r}}_N + \frac{\partial f}{\partial t} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + B = 0}$$

$$f \equiv z - h = 0 \;\Rightarrow\; \nabla f \cdot \mathbf{v} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{z} = 0$$



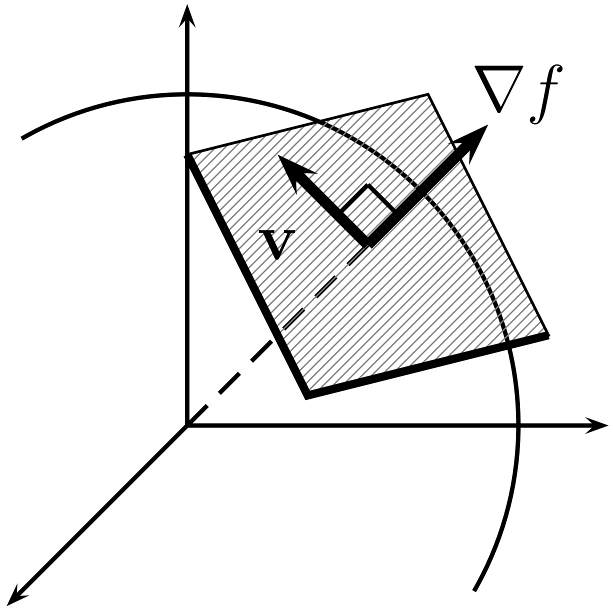
Ascensor: sistema reónomo $z - h(t) = 0$

$$\dot{f} \equiv \dot{z} - \dot{h} = 0 \;\Rightarrow\; \nabla f \cdot \mathbf{v} + f_t = 0 \;\Rightarrow\; v_n = \dot{z} = -f_t / |\nabla f|$$

Partícula sobre superficie esférica: $f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$$

$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \parallel \mathbf{u}_r$, la velocidad es tangente a la superficie.
Si la ligadura fuera no estacionaria —por ejemplo, un globo que se hincha— la velocidad no es tangente:



$$f(\mathbf{r}, t) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 = 0$$

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} + f_t = 0 \;\Rightarrow\; v_n = -\frac{f_t}{|\nabla f|} = \dot{R}$$

Ligaduras cinemáticas no integrables

Hay ligaduras cinemáticas que **no son** la derivada de una finita:

$$g\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t\right) \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{v}_i + B(\mathbf{r}_i, t) = 0$$

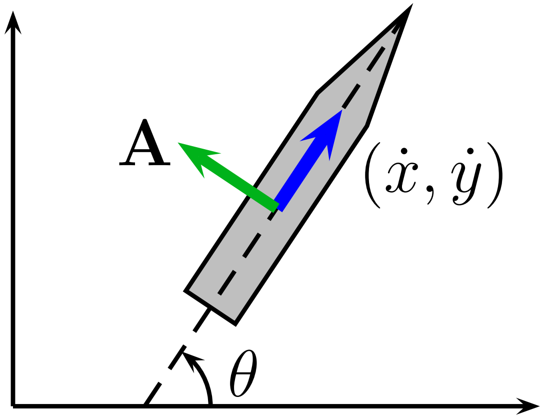
$$\nexists \;\; f\left(\mathbf{r}_i, t\right) \;\; / \;\; g\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t\right) = \frac{d}{dt} f\left(\mathbf{r}_i, t\right)$$

- Todas finitas o cinemáticas integrables $\longrightarrow$ Sistema holónomo
- Al menos 1 cinemática no integrable $\longrightarrow$ Sistema no holónomo
- Las ligaduras finitas se puede usar para despejar coordenadas y dejar sólo las independientes (n)
- Las cinemáticas no sirven, pues aparecen las velocidades
- Si son integrables, se integran $\longrightarrow$ reducir coordenadas
- En los sistemas no holónomos no es posible reducir el número de ecuaciones al mínimo

Ligaduras cinemáticas no integrables

No integrable: Patín / Esquí / Rueda /Patín de hielo. Sólo puede moverse en la dirección de la cuchilla. No impone condiciones a las coordenadas: puede ponerse en cualquier punto y orientarse en cualquier dirección.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)\cdot(\dot{x},\dot{y}) = \\ = -\sin\theta\,\dot{x} + \cos\theta\,\dot{y} = 0$$



- No integrable: 1 ec., 3 v.d.(x, y, θ), 1 v.i. (t). Aunque se tomara la θ como v. i., dividiendo por $\dot{\theta}$, seguiría sin poderse integrar.
- Sólido libre en el plano: 3 GDL, x, y, θ. Con ligadura cinemática: $n = 3 - 1 = 2$ GDL.
- Análogo al de un automóvil o una bicicleta: 2 GDL dirección (manillar/volante) y el avance (pedales/motor).

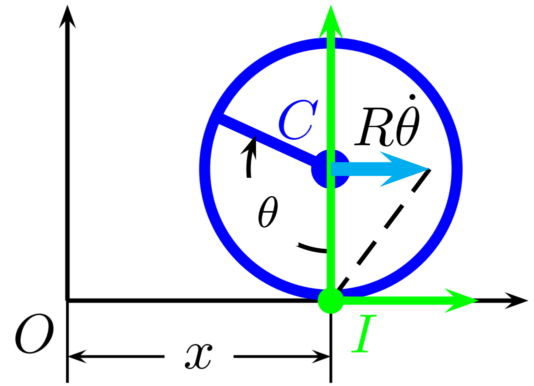
Integrable: Rodadura sin deslizamiento en el plano:

$$\mathbf{v}^I = \mathbf{v}^C + \boldsymbol{\omega} \wedge \overline{CI} = \left(\dot{x} - R\dot{\theta}\right)\, \mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

- Ligadura integrable según y:

$$g_1 \equiv \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^I + B_1 =$$

$$= \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_{21}^I + 0 = \boxed{\dot{y} = 0} \quad \Rightarrow \quad y = R$$



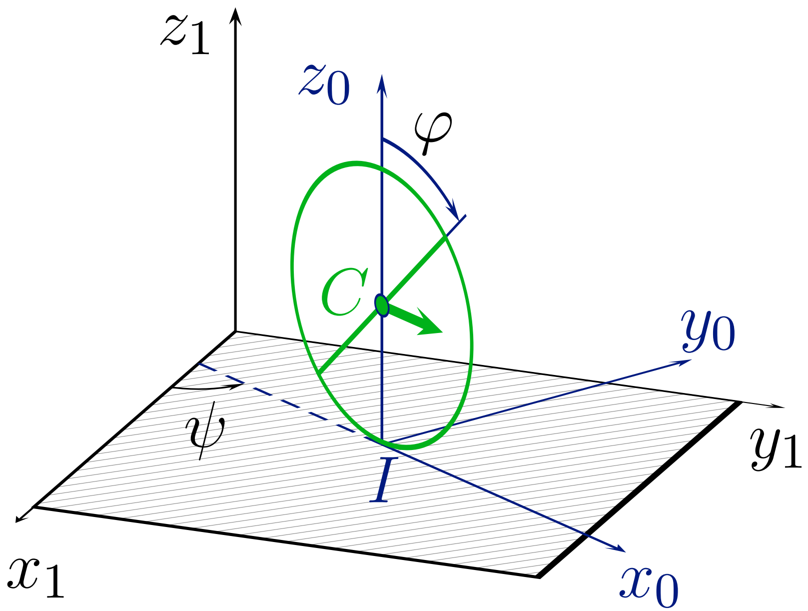
- Ligadura integrable según x:

$$g_2 \equiv \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v}_{21}^I + B_2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}_{21}^I + 0 = \boxed{\dot{x} - R\dot{\theta} = 0} \;\Rightarrow\; x = R\theta + \cancel{\mathrm{Cte}}.$$

- De las tres coordenadas, sólo queda una independiente: x ó θ, pues sólo hay un grado de libertad: $n = 3 - 2$.

Ligadura cinemática no integrable

No integrable: Disco que rueda sin deslizar sobre un plano $\perp$.
($\perp \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ Lig. finita)



$$\mathbf{v}_{21}^{I} = \mathbf{v}_{21}^{C} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{CI} = \mathbf{0} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_1 + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_0 \\ 0 & \dot{\varphi} & \dot{\psi} \\ 0 & 0 & -R \end{vmatrix} =$$

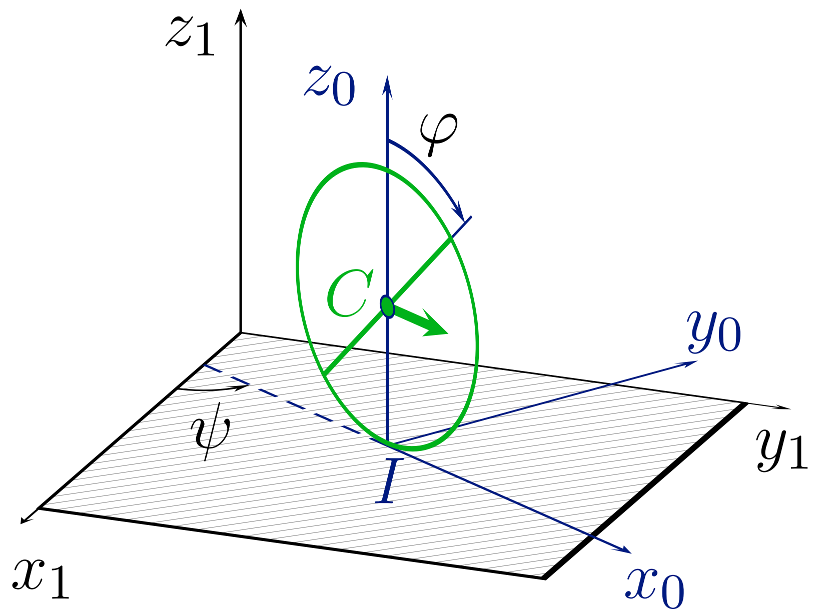
$$= \begin{Bmatrix} \dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\psi \\ \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\psi \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - R\dot{\varphi} \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} & \hat{g}_1 &\equiv \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} \\ g_2 &\equiv \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} & \hat{g}_2 &\equiv \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} \\ g_3 &\equiv \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} & \hat{g}_3 &\equiv \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^{I} \end{aligned} \qquad \begin{Bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}_{10} \cdot \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix}$$

Ligadura cinemática no integrable

- La ligadura de z es integrable: el disco no se levanta del suelo:

$$g_3 \equiv \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = \hat{g}_3 \equiv \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = $$
$$= \dot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = R$$



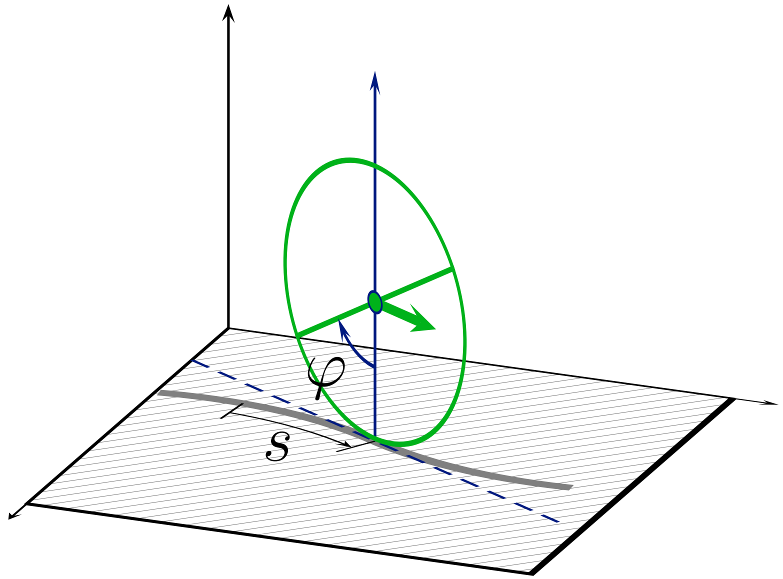
- Las de x e y no son integrables:

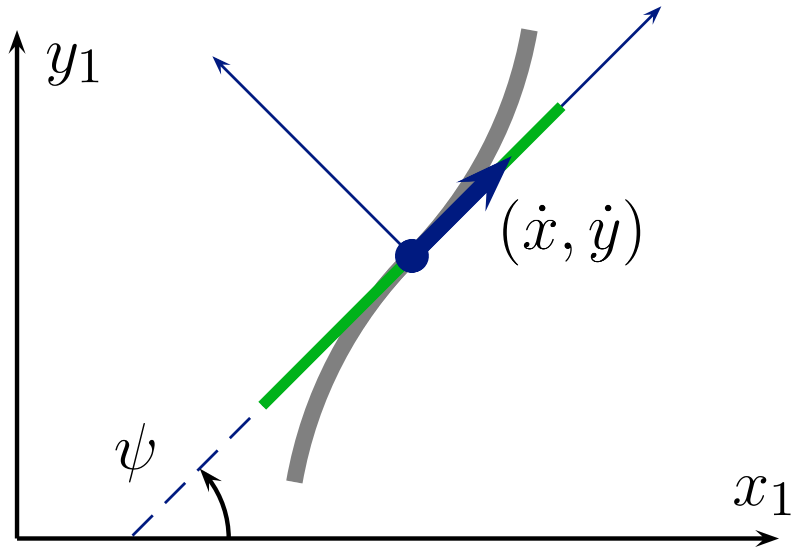
$$g_1 \equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - R\dot{\varphi} = 0;$$
$$g_2 \equiv \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0$$

- Proyectadas en ejes 1 — 2 Ecs, 4 Var. Dep, 1 Var. Indep.

$$\hat{g}_1 \equiv \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = \dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\psi = 0;$$
$$\hat{g}_2 \equiv \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{v}_{21}^I = \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\psi = 0$$

Ligaduras cinemáticas no integrables





- $\sqrt{\hat{g}_1^2 + \hat{g}_2^2} \equiv \dot{s} = R\dot{\varphi} \;\rightarrow\; s = R\varphi + C :$ Rueda sin deslizar
- $\hat{g}_2/\hat{g}_1 \equiv \frac{dy}{dx} = \tan\psi :$ dirección de la rueda: ¡libre!
- No puede integrarse: ψ no está determinado por la ligadura (si no, el recorrido del coche estaría fijado antes de arrancar)
- Está determinado si se da una ley $\psi(s) \;\rightarrow$ fijar la trayectoria

Coordenadas generalizadas

- N partículas, g ligaduras $\rightarrow$ sólo $n = 3N - g$ coordenadas independientes
- Sistema holónomo: las ligaduras se usan para eliminar las dependientes
- Sistema no holónomo: no se pueden usar las ligaduras no integrables para eliminar las dependientes

- Partícula sobre esfera lisa: $f(\mathbf{r}) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
- Sistema holónomo, $GDL = n = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.
- Eliminar una: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; (x, y) independientes
- Compleja e incómoda: raíz, no uniforme.
- Mejor coordenadas esféricas:

$$\overbrace{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R}^{\text{ligadura}} \qquad \overbrace{\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \sin\varphi = \frac{z}{R}}^{\text{independientes}}$$

Coordenadas generalizadas: sist. holónomos

- N partículas, g ligaduras finitas: $n = 3N - g$ independientes.
- Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que las independientes son las n primeras,

$$\underbrace{\overbrace{x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, x_k}^{n}, \overbrace{y_k, z_k, \ldots, x_N, y_N, z_N}^{g}}_{3N}$$

- La configuración del sistema se puede expresar como:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \left(x_1, y_1, z_1 \ldots x_k, t \right), \quad i = 1 \ldots N$$

- $y_k, z_k, \ldots x_N, y_N, z_N$ salen de las ecuaciones de las ligaduras.
- Olvidamos las ligaduras: ya están contadas

Coordenadas generalizadas: sist. holónomos

- Se puede trabajar con las coordenadas cartesianas independientes (para sólidos, también ángulos de Euler)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \left(x_1, y_1, z_1 \ldots x_k, t \right), \quad i = 1 \ldots N$$

- Con frecuencia es más cómodo usar otros n parámetros independientes, las **coordenadas generalizadas**:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \left(q_1, \ldots, q_n, t \right), \quad i = 1 \ldots N$$

- Tienen que estar relacionadas como cambio de variable:

$$\left| \frac{\partial \left(x_1, y_1, \ldots, x_k \right)}{\partial \left(q_1, q_2, \ldots, q_n \right)} \right| \neq 0$$

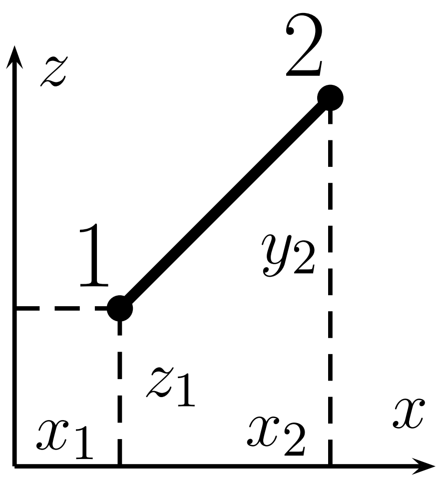
- El movimiento del sistema estará perfectamente determinado cuando se conozcan $q_1(t), \ldots, q_n(t)$.

Coordenadas generalizadas: sist. holónomos

Ejemplo: Dos partículas 1 y 2. Coordenadas: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

3 Ligaduras:

- $y_1 = 0$
- $y_2 = 0$
- $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = L^2$



Escoger 3 coordenadas independientes:

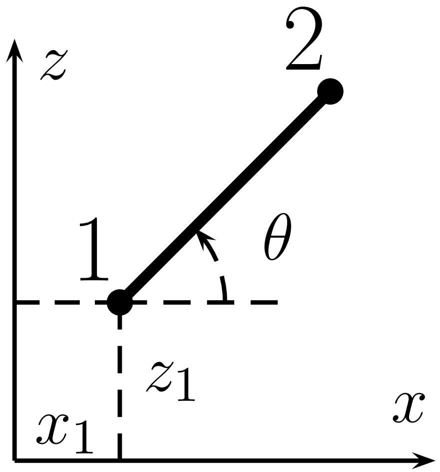
- Dos determinadas directamente por las ligaduras $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.
- De las otras cuatro, se puede despejar una, por ejemplo:

$$z_2 = z_1 \pm \sqrt{L^2 - (x_2 - x_1)^2}$$

- Raíz molesta. No uniforme: hay que distinguir qué signo tomar
- $x_1, z1$ arbitrarias; x_2 limitada por la ligadura

Coordenadas generalizadas: sist. holónomos

Es más conveniente tomar un conjunto de coordenadas generalizadas:



- $q_1 = x_1$
- $q_2 = y_1$
- $q_3 = \theta$

Las coordenadas de 1 y 2 pasan a ser:

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, 0, z_1), \quad \mathbf{r}_2 = (x_1 + L\cos\theta, 0, z_1 + L\sin\theta)$$

Las tres pueden tomar valores arbitrarios, y las $\mathbf{r}_i$ están unívocamente definidas. Se puede comprobar que el jacobiano es distinto de cero:

$$\left|\frac{\partial\,(x_1, y_1, x_2)}{\partial\,(x_1, y_1, \theta)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L\sin\theta \end{vmatrix} = -L\sin\theta$$

Coordenadas generalizadas: No holónomos

- Sistema con N partículas
- Sujeto a g ligaduras finitas o cinemáticas integrables (integradas)

$$f_j(\mathbf{r}_i, t) = 0, \quad j = 1 \ldots g$$

- Sujeto a h ligaduras cinemáticas no integrables

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i + B = 0, \quad k = 1 \ldots h$$

- n grados de libertad $GDL = 3N - g - h = n$
- Pero no se pueden obtener n coordenadas generalizadas: las h ligaduras cinemáticas no sirven para reducir coordenadas
- Hay que usar $m = 3N - g > GDL$ coordenadas generalizadas no independientes

Espacio de configuración

- Espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$: N partículas libres $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1 \ldots N$
- Espacio de configuración $\mathbb{R}^{3N}$: Punto representativo del sistema:

$$\mathbf{R} = (x_1, y_1, z_1 \ldots, x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

- Variedad de configuración: Sistema sujeto a g ligaduras finitas

$$f_j(\mathbf{r}_i, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, g$$

  Ecuaciones **implícitas** de una variedad (dim n) inmersa en $\mathbb{R}^{3N}$

- Espacio de configuración (otra acepción) $\mathbb{R}^n$: $n = 3N - g$ coordenadas generalizadas. Punto representativo del sistema:

$$\mathbf{R} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

  Ecuaciones **paramétricas** de la variedad de configuración